

Grundlagen der Maschinenberechnung am Beispiel
einer permanentmagnetisch erregten Synchronmaschine
mit Luftspaltmagneten

VOLKER BOSCH
(Volker.Bosch@z.zgs.de)

Sommer 1999

Kapitel 1

Grundlagen der Permanentmagnetberechnung

1.1 Der magnetische Kreis mit Permanentmagnet

Abbildung 1.1 zeigt die typische Kennlinie eines permanentmagnetischen Werkstoffes. Üblicherweise liegt der Arbeitspunkt eines permanentmagnetischen Kreises im linearen Bereich der Kennlinie, also rechts vom „Knick“.

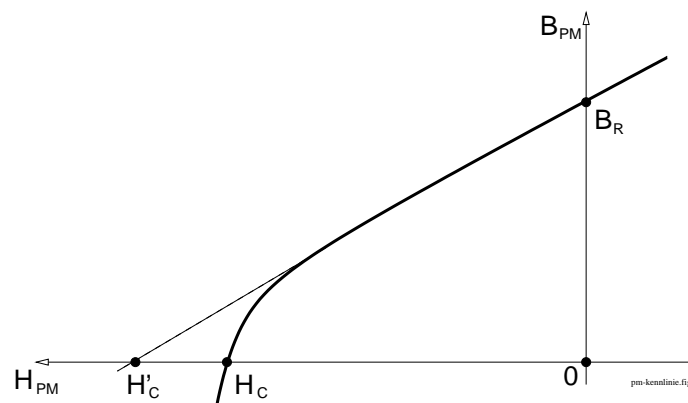


Abbildung 1.1: Kennlinie eines permanentmagnetischen Werkstoffes.

Dort weist der Werkstoff einen linearen Zusammenhang zwischen Flußdichte und Feldstärke auf, seine relative Permeabilität μ_{PM} ist konstant:

$$\mu_{PM} = \frac{B_R}{H'_C \mu_0} \quad (1.1)$$

Für die linearisierte Kennlinie der Flußdichte über der Feldstärke gilt somit:

$$B_{PM} = B_R - \mu_0 \mu_{PM} H_{PM} \quad (1.2)$$

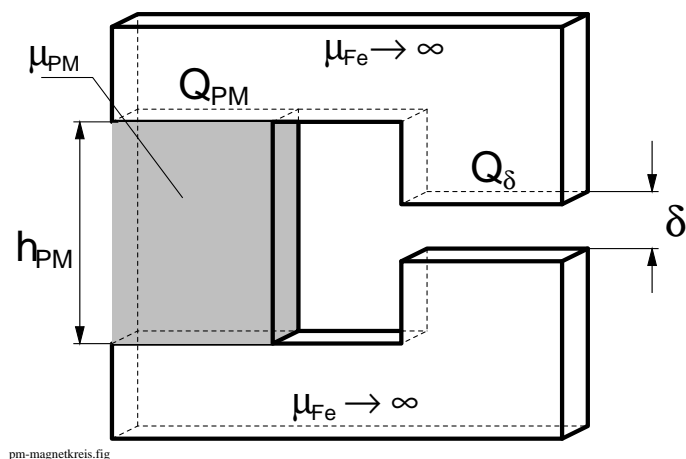


Abbildung 1.2: Prinzipieller Aufbau eines magnetischen Kreises mit Permanentmagnet.

Abbildung 1.2 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines magnetischen Kreises mit Permanentmagnet. Die weichmagnetischen Joche sollen hier vernachlässigt werden ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$).

Es ergibt sich für die Flußdichte im Luftspalt δ

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta \quad (1.3)$$

Unter der Annahme $\mu_{Fe} \rightarrow \infty$ folgt aus dem Durchflutungsgesetz:

$$H_\delta \delta = H_{PM} h_{PM} \quad (1.4)$$

Bei Vernachlässigung der Streuung gilt aufgrund der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes:

$$B_\delta Q_\delta = B_{PM} Q_{PM} \quad (1.5)$$

Aus den Gleichungen (1.2) und (1.3) folgt mit (1.4) und (1.5):

$$B_\delta = \frac{B_R h_{PM}}{\frac{Q_\delta}{Q_{PM}} h_{PM} + \mu_{PM} \delta} \quad (1.6)$$

Mit Gleichung (1.6) kann der Luftspaltfluß einer permanentmagnetisch erregten Maschine im Leerlauf ermittelt werden [1], wobei aber der Faktor Q_δ/Q_{PM} bei Luftspaltmagneten mit Vorsicht zu behandeln ist!

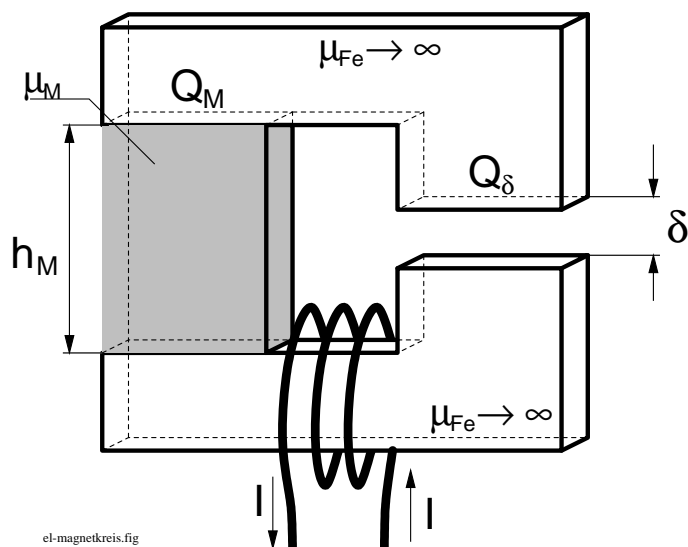


Abbildung 1.3: Prinzipieller Aufbau eines magnetischen Kreises mit elektrischer Erregung.

1.2 Umrechnung eines Permanentmagneten in eine äquivalente elektrische Durchflutung

Für den elektrisch erregten magnetischen Kreis mit Luftspalt und Medium M gilt bei Vernachlässigung der Weicheisenjoche ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$) gemäß Durchflutungsgesetz:

$$\Theta = H_\delta \delta + H_M h_M \quad (1.7)$$

Der Werkstoff M weise den folgenden Zusammenhang zwischen Flußdichte und Feldstärke auf:

$$B_M = \mu_0 \mu_M H_M \quad (1.8)$$

Für den Luftspalt gilt:

$$B_\delta = \mu_0 H_\delta \quad (1.9)$$

Unter der vereinfachenden Annahme konstanter Querschnittsflächen, also $Q_M = Q_\delta$ und vernachlässigbarem Streufluß, folgt aus der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes:

$$B_\delta = B_M = B \quad (1.10)$$

Aus den Gleichungen (1.8) und (1.6) ergibt sich mit (1.7) und (1.10):

$$\Theta = B \left(\frac{h_M}{\mu_M} + \delta \right) \frac{1}{\mu_0} \quad (1.11)$$

Formt man die Gleichung des magnetischen Kreises mit Permanentmagnet gemäß Gleichung (1.6) um und nimmt konstante Querschnittsflächen an ($Q_\delta = Q_{PM}$), so erhält man:

$$B_\delta \left(\frac{h_{PM}}{\mu_{PM}} + \delta \right) \frac{1}{\mu_0} = B_R \frac{h_{PM}}{\mu_0 \mu_{PM}} \quad (1.12)$$

Der Vergleich der beiden Gleichungen (1.11) und (1.12) zeigt, daß man die Wirkung eines Permanentmagneten in eine äquivalente Durchflutung umrechnen kann [2]. Die Magnethöhe wird dabei der wirksamen Luftspatllänge δ_i zugeschlagen. Es ergibt sich:

$$\Theta' = B_R \frac{h_{PM}}{\mu_0 \mu_{PM}} \quad (1.13)$$

$$\delta_i = \frac{h_{PM}}{\mu_{PM}} + \delta \quad (1.14)$$

Mit dieser Umrechnung ist es möglich permanentmagnetisch erregte Synchronmaschinen mit den klassischen Berechnungsmethoden der elektrisch erregten Synchronmaschine zu bearbeiten. Ibs. ist eine Zeigerdiagrammdarstellung möglich.

1.3 Berechnung eines Magnetkreises mittels eines Netzwerks konzentrierter Elemente

Die graphische Ermittlung des Arbeitspunkts eines magnetischen Kreises wird sehr aufwendig – wenn nicht gar unmöglich – sobald Streuung und Eisensättigung berücksichtigt werden müssen. Zur Bestimmung des Arbeitspunkts eines solchen „vermaschten“ magnetischen Kreises bietet es sich an den Kreis als Netzwerk konzentrierter Ersatzelemente darzustellen [1].

Die Durchflutung Θ entspricht der „magnetischen Ersatzspannung“, der Fluß Φ dem „magnetischen Ersatzstrom“.

Für die numerische Berechnung eines Netzwerks bietet sich die Knotenpotentialanalyse an [3]. Hierfür sind die Netzwerkelemente in Leitwerte und Stromquellen umzurechnen. Luftspalte und Streuwege in Luft sind lineare Widerstände mit dem magnetischen Widerstand $h/(Q\mu_0)$, bzw. dem magnetischen Leitwert $\Lambda = \mu_0 Q/h$. Die weichmagnetischen Jochstücke und die permanentmagnetischen Elemente werden anhand ihrer Magnetisierungskurve im Arbeitspunkt linearisiert und durch entsprechende Ersatzstromquellen und Leitwerte ersetzt, wie die Abbildungen 1.4 und 1.6 zeigen.

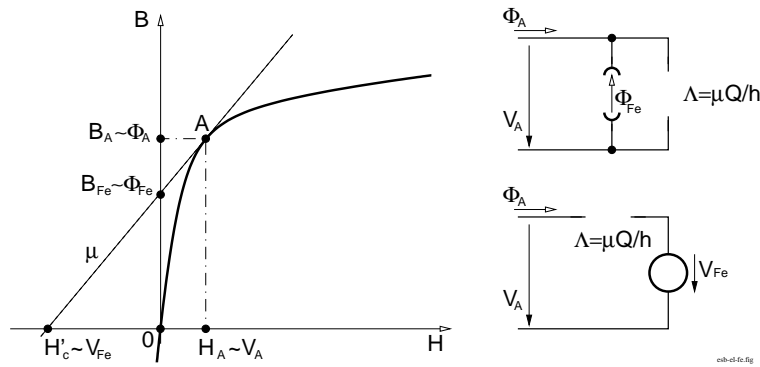


Abbildung 1.4: Ermittlung der magnetischen Ersatzschaltbildgrößen eines weichmagnetischen Joches im Arbeitspunkt A (H_A, B_A).

Die Durchflutungen („magnetischen Ersatzspannungen“) werden anhand der Kennlinien der Ersatzelemente, an denen sie wirken, in entsprechende „magnetischen Ersatzspannungsquellen“ umgerechnet. Hierzu müssen die Kennlinien entsprechend der magnetischen Feldstärken verschoben werden. Abbildung 1.5 zeigt Kennlinie und zugehörige Ersatzquellen eines elektrisch erregten weichmagnetischen Jochstücks.

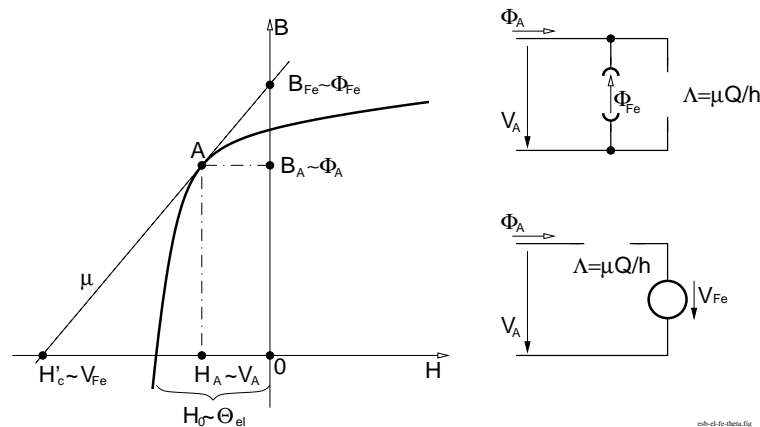


Abbildung 1.5: Ermittlung der magnetischen Ersatzschaltbildgrößen eines elektrisch erregten weichmagnetischen Joches im Arbeitspunkt A (H_A, B_A).

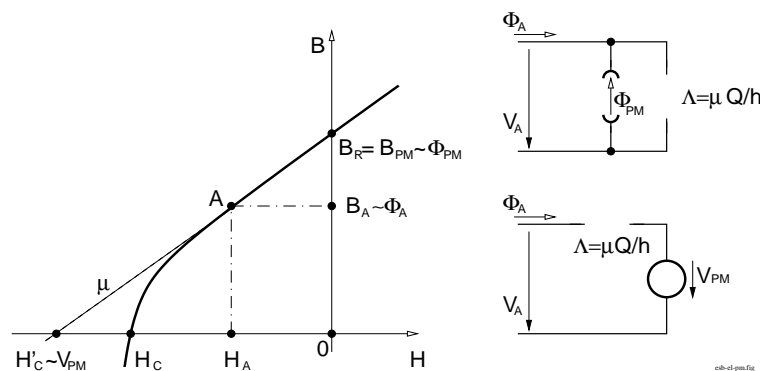


Abbildung 1.6: Ermittlung der magnetischen Ersatzschaltbildgrößen eines Permanentmagneten im Arbeitspunkt A (H_A, B_A).

Die Analyse des Netzwerks erfolgt iterativ, indem die Startwerte für $H = 0$ (magnetischer „Kurzschluß“) der einzelnen Elemente bestimmt werden. Aktive Elemente, also elektrisch

erregte Jochstücke und permanentmagnetische Werkstoffe befinden sich somit im Remanenzpunkt, d.h. der für die Knotenpotentialanalyse zu verwendende Strom beträgt B_r/Q .

Es ergeben sich die Potentiale (magnetische Spannungen) der einzelnen Knoten. Die Potentialdifferenz zwischen zwei Knoten entspricht der magnetischen Feldstärke über dem jeweiligen Element. Mit ihrer Hilfe wird für jedes Element der neue Arbeitspunkt (magnetischer Strom und Leitwert) bestimmt. Diese Werte setzt man erneut in die Netzwerkmatrix ein und löst diese.

Für eine sichere Konvergenz dieses Verfahrens kann es notwendig sein, die Magnetisierungskurven von Eisen nur in einem Quadranten darzustellen. Im Ursprung müssen die Kurven (physikalisch falsch) linear fortgesetzt werden. Hystereseeffekte verhindern ebenfalls die Konvergenz dieses Verfahrens.

Bei umfangreicheren Netzwerken ergeben sich schnell Matrizen sehr hoher Dimension, die jedoch in der Regel dünn besetzt sind. Mittels geeigneter numerischer Algorithmen lassen sich diese effizient bearbeiten .

Kapitel 2

Grundlagen der Maschinenberechnung am Beispiel einer permanentmagnetisch erregten Synchronmaschine mit Luftspaltmagneten

2.1 Vorbemerkungen

2.1.1 Einschränkungen

Die hier aufgeführten Formeln unterliegen den folgenden Einschränkungen:

- Keine Eisensättigung ($\mu_{Fe} \rightarrow \infty$)
- dreisträngige Maschine
- Einschichtwicklung
- Luftspaltmagnete, keine mag. Vorzugsrichtung im Läufer
- radiale Magnetisierung (d.h. rechteckförmige Verteilung der Luftspaltinduktion)

2.1.2 Begriffserklärungen

Breite: Der Begriff Breite wird im Zusammenhang mit dem Motor für die tangentielle Ausdehnung, also eine Bogenlänge, verwendet (Formelzeichen b). Beispiel: Breite eines Pols b_{PM}).

Harmonische: Oberwellen oder Oberschwingungen. Kennzeichnung: Index in römischen Ziffern. Beispiel: Grundwellenamplitude des mag. Flußes $\hat{\Phi}_I$.

Höhe: Der Begriff Höhe wird im Zusammenhang mit dem Motor für die radiale Ausdehnung verwendet (Formelzeichen h , Ausnahme: Luftspalthöhe δ). Beispiel: Magnethöhe h_{PM} .

Länge: Der Begriff Länge wird im Zusammenhang mit dem Motor für die Ausdehnung in Richtung der Läuferachse verwendet (Formelzeichen l). Beispiel: Statorlänge l_1 .

2.2 Die permanentmagnetisch erregte Synchronmaschine im Leerlauf

2.2.1 Permanentmagnet und Luftspaltfluß

Der magnetisch wirksame Luftspalt δ_i setzt sich aus der geometrischen Luftspalthöhe δ multipliziert mit dem Carterfaktor k_C und der magnetisch wirksamen Magnethöhe h_{PM}/μ_{PM} zusammen.

$$\delta_i = k_C \delta + \frac{h_{PM}}{\mu_{PM}} \quad (2.1)$$

Für den Carterschen Faktor gilt gemäß [4] Gleichung (236a) und [5] Gleichungen (5.64) und (5.65) (mit der Nutteilung τ_n und der Nutschlitzbreite b_s):

$$k_C = \frac{\tau_n}{\tau_n - \gamma \delta} \quad \text{mit} \quad (2.2)$$

$$\gamma \approx \frac{1}{1 + 5 \frac{\delta}{b_s}} \quad \text{für} \quad \delta/b_s < 1 \quad (2.3)$$

Die Magnetbreite b_{PM} wird hier als Kreisbogen auf Höhe der halben Magnethöhe definiert. α_p stellt den (geometrischen) Polbedeckungsfaktor (in %) dar. Dieser berücksichtigt die tatsächliche Breite der Magnetpole, die u.U. auch von der Magnetisierungseinrichtung abhängig ist. D_i ist der Statorbohrungsdurchmesser.

$$b_{PM} = \alpha_p \frac{\pi}{2p} (D_i - 2\delta - h_{PM}) \quad (2.4)$$

Aufgrund der Streuung in den Polkanten verkürzt sich die wirksame Breite (bzw. Bogenlänge) des Magnets auf die ideelle Breite b_{PM_i} . Als Richtwert kann eine Verkürzung um die halbe Magnethöhe angenommen werden.

$$b_{PM_i} = b_{PM} - \frac{1}{2} h_{PM} \quad (2.5)$$

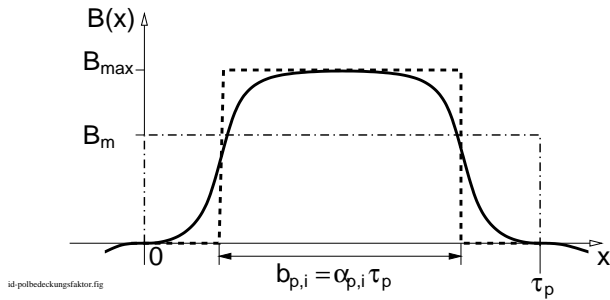


Abbildung 2.1: Die Definition der ideellen Polbreite b_{p_i} und des ideellen Polbedeckungsfaktors α_{p_i} .

Das Verhältnis von ideeller Magnetbreite b_{PM_i} zur Polteilung τ_p ergibt den ideellen Polbedeckungsfaktor α_{p_i} .

Abbildung 2.1 erläutert die Definition des ideellen Polbedeckungsfaktors über die ideelle Polbreite b_{p_i} . Diese entsteht aus der Umrechnung der Luftspaltinduktion in eine flächengleiche rechteckförmige Verteilung mit gleichem Maximalwert B_{max} .

Aus Abbildung 2.1 folgt:

$$\alpha_{p_i} = \frac{b_{PM_i}}{\tau_p} = \frac{B_m}{B_{max}} \quad (2.6)$$

Bei Synchronmaschinen (welche in der Regel als Generatoren verwendet werden) wird häufig der Polformfaktor C_m anstelle des ideellen Polbedeckungsfaktors α_i verwendet.

$$C_m = \frac{\pi}{2} \frac{B_m}{B_{max}} = \frac{\pi}{2} \alpha_{p_i} \quad (2.7)$$

Bei Generatoren sind die Pole i.d.R. so gestaltet, daß sich eine möglichst sinusförmige Luftspaltinduktion ergibt. Bei exakt sinusförmiger Luftspaltinduktion ergibt sich ein Polformfaktor $C_m = 1$. Aus dem Polformfaktor ist somit direkt ersichtlich wie stark die Luftspaltinduktion von dem angestrebten sinusförmigen Verlauf abweicht [5].

Die Streuung im Stirnbereich wird durch den Polverkürzungsfaktor k_{CP} berücksichtigt. Vogt führt diesen auf die Zusammenhänge des Carterschen Faktors k_C gemäß der Gleichungen (2.2) und (2.3) zurück [5], wobei die Nutteilung durch die Länge des Magnets, die Nutschlitzbreite durch die Differenz zwischen Magnetlänge l_{PM} und Blechpaketlänge l_1 (siehe Abbildung 2.2) und die Luftspalthöhe durch den magnetisch wirksamen Luftspalt δ_i gemäß Gleichung (2.1) zu ersetzen ist.

Da hier die Magnetlänge durchweg größer ist als die Länge des Statorblechpaketes¹, wird als Magnetlänge die geometrische Länge und nicht die wirksame Länge des Magneten verwendet. Sind Läufermagnet und Statorblech (nahezu) gleich lang, so muß die Kantenstreuung im Magnet berücksichtigt werden.

¹Bei Maschinen mit Luftspaltmagneten aus Ferrit (geringe Remanenzinduktion) wird in der Regel die Magnetfläche gegenüber der Luftspaltfläche vergrößert, um den Luftspaltfluß zu steigern.

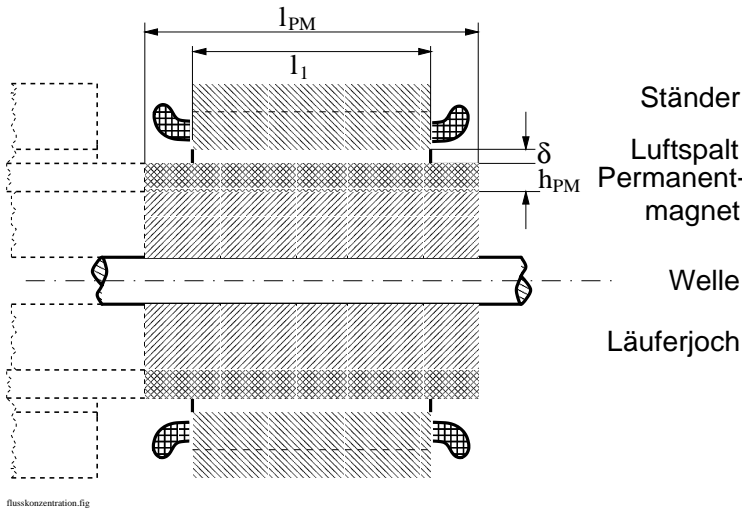


Abbildung 2.2: Prinzip der Flusskonzentration durch Verlängerung des Läufers

Mit der Näherungsformel für den Carterschen Faktor gemäß Gleichung (2.3) und [5], Tafel 5.2 ergibt sich somit

$$k_{CP} = \frac{l_{PM}}{l_{PM} - \frac{l_{PM} - l_1}{1 + 5 \delta_i / (l_{PM} - l_1)}} \quad (2.8)$$

Hiermit ergibt sich die wirksame Magnetlänge l_{PM_i}

$$l_{PM_i} = \frac{l_{PM}}{k_{CP}} \quad (2.9)$$

Unter der Annahme einer unendlichen Permeabilität des Statoreisens wird der Arbeitspunkt des Magnets lediglich durch die Höhe des Luftspalts bestimmt. Mit Gleichung (1.6) kann nun die magnetische Flußdichte im Luftspalt der Maschine bestimmt werden. Für die Querschnittsflächen von Permanentmagnet und Luftspalt sind die wirksamen Flächen Q_{PM_i} und Q_{δ_i} zu verwenden, um die Einflüsse von Streuung und Feldaufweitung im Luftspalt zu berücksichtigen.

$$B_{\delta_0} = B_r \frac{h_{PM}}{\frac{Q_{\delta_i}}{Q_{PM_i}} h_{PM} + \mu_{PM} k_C \delta} \quad (2.10)$$

Die wirksame Magnetfläche Q_{PM_i} berechnet sich aus dem Produkt der wirksamen Magnetlänge l_{PM_i} und der wirksamen Magnetbreite b_{PM_i} .

$$Q_{PM_i} = l_{PM_i} b_{PM_i} \quad (2.11)$$

Die wirksame Luftspaltfläche Q_{δ_i} berechnet sich aus dem Produkt der wirksamen Luftspaltlänge l_{δ_i} und der wirksamen Polbreite b_{δ_i} .

$$Q_{\delta_i} = l_{\delta_i} b_{\delta_i} \quad \text{mit} \quad (2.12)$$

$$l_{\delta_i} = l_1 + 2\delta \quad (2.13)$$

$$b_{\delta_i} = \alpha_{p_i} \tau_p \quad (2.14)$$

Der Luftspaltfluß $\Phi_{\delta,0}$ pro Pol wird über die wirksame Luftspaltquerschnittsfläche Q_{δ_i} aus der Luftspaltinduktion ermittelt.

$$\Phi_{\delta,0} = B_{\delta,0} Q_{\delta_i} \quad (2.15)$$

2.2.2 Wicklung

Die Lochzahl q bezeichnet die Anzahl der Nuten pro Pol und Strang.

$$q = \frac{N}{2p m} \quad (2.16)$$

Der elektrische Nutwinkel α_n ergibt sich aus Polpaarzahl p und Nutzahl N .

$$\alpha_n = 2\pi \frac{p}{N} \quad (2.17)$$

Für den Wicklungsfaktor ist hier lediglich der Zonenfaktor relevant. Bei der Einschichtwicklung erhält man den folgenden Ausdruck für die ν -te Harmonische:

$$\xi_{z\nu} = \frac{\sin\left(\nu q \frac{\alpha_n}{2}\right)}{q \sin\left(\nu \frac{\alpha_n}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\nu \frac{\pi}{2m}\right)}{q \sin\left(\nu \frac{\pi}{2qm}\right)} \quad (2.18)$$

Die einseitige Wicklungskopflänge l_{WK} wird aus dem Bohrungsdurchmesser D_i , der Nutschlitzhöhe h_s und der Nuthöhe h_n abgeschätzt. Die Ausladung des Wickelkopfes wird durch die Summe aus maximaler Nutbreite und maximaler Zahnbreite abgeschätzt.

$$l_{WK} = \pi \frac{D_i + 2h_s + h_n}{2p} + 3(b_{n_{max}} + b_{z_{max}}) \quad (2.19)$$

Die mittlere Windungslänge l_{w_1} setzt sich aus Wicklungskopflänge l_{WK} und Statorlänge l_1 zusammen.

$$l_{w_1} = 2(l_{WK} + l_1) \quad (2.20)$$

2.2.3 Induzierte Spannung

Die Grundwelle der Luftspaltinduktion induziert die Leerlaufspannung in der Statorwicklung. Hierzu muß die Grundwelle der Luftspaltinduktion ermittelt werden. Aufgrund der radialen Magnetisierung ist die Luftspaltinduktion rechteckförmig. Die Amplitude der Grundwelle $\hat{B}_{\delta,0I}$ kann über die Koeffizienten b_ν der Fourier-Reihe ermittelt werden. Die Verteilung der Luftspaltinduktion ist eine ungerade Funktion über x ($B(-x) = -B(x)$). Damit werden die Fourier-Koeffizienten $a_\nu = 0$ und es müssen lediglich die Koeffizienten b_ν für $\nu = 1, 2, 3 \dots$ bestimmt werden.

$$\begin{aligned} b_\nu &= \frac{1}{\tau_p} \int_{-\tau_p}^{\tau_p} B_{\delta,0}(x) \sin\left(\frac{\nu\pi}{\tau_p} x\right) dx \quad \text{für } \nu = 1, 2, 3, 4, \dots \\ &= B_{\delta,0} \frac{4}{\nu\pi} \left((-1)^{\frac{\nu-1}{2}}\right) \sin\left(\nu \frac{\pi}{2} \alpha_{p_i}\right) \quad \text{mit } \nu = 1, 3, 5, \dots \end{aligned} \quad (2.21)$$

Damit liegt die räumliche Verteilung der Induktionsgrundwelle im Luftspalt (bei Leerlauf) fest.

$$B_{\delta,0I}(x) = \hat{B}_{\delta,0I} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \quad \text{mit} \quad \hat{B}_{\delta,0I} = \frac{4}{\pi} B_{\delta,0} \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha_{p_i}\right) \quad (2.22)$$

Der Polformkoeffizient der Grundwelle C_I beschreibt das Verhältnis der Grundwellenamplitude der Luftspaltinduktion $\hat{B}_{\delta I}$ zur der maximalen Luftspaltinduktion über der ideellen Polbreite b_{PM_i} gemäß Abbildung 2.1. Bei der hier betrachteten Maschine mit konstantem Luftspalt, d.h. mit magnetisch rotationssymmetrischem Läufer, ergibt sich:

$$C_I = \frac{\hat{B}_{\delta I}}{B_{\delta,max}} = \frac{4}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2} \alpha_{p_i}\right) \quad (2.23)$$

Die Auswirkungen von Sättigung oder nicht konstantem Luftspalt werden ggf. durch zusätzliche Koeffizienten berücksichtigt.

Die räumliche Verteilung des Flußes ergibt sich durch Integration der Induktionsverteilung über eine Polteilung

$$\Phi_{\delta,0I}(x) = \int_{\tau_p} l_{\delta_i} B_{\delta,0I}(x) dx = \hat{\Phi}_{\delta,0I} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \quad \text{mit} \quad \hat{\Phi}_{\delta,0I} = \frac{2}{\pi} \hat{B}_{\delta,0I} l_{\delta_i} \tau_p \quad (2.24)$$

Aus der Änderung des Flußes ergibt sich die induzierte Spannung u_i gemäß Induktionsgesetz aus dem mit der Wicklung verketteten Fluß Ψ

$$u_i = -\frac{d\Psi}{dt} \quad \text{mit} \quad \Psi = w \xi \Phi \quad (2.25)$$

Bei zeitlicher und räumlicher Änderung, beispielsweise aufgrund einer Bewegung des Rotors um den Weg x , ergibt sich der folgende Zusammenhang:

$$u_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.26)$$

$$\text{mit } x(t) = f 2\tau_p t \quad \text{und} \quad f = n p \quad \text{folgt} \quad (2.27)$$

$$u_i = -2\tau_p n p \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.28)$$

Bei zeitlich konstantem Fluß ergibt sich daraus:

$$u_i = -2\tau_p n p \frac{d\Psi}{dx} \quad (2.29)$$

Die räumliche Verteilung des Grundwellenflusses im Luftspalt einer permanentmagnetisch erregten Synchronmaschine bei Leerlauf ergibt sich zu:

$$\Psi_{\delta,0_I}(x) = \hat{\Psi}_{\delta,0_I} \cos\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\pi}{\tau_p} \hat{\Psi}_{\delta,0_I} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \quad \text{mit} \quad \hat{\Psi}_{\delta,0_I} = w_1 \xi_I \hat{\Phi}_{\delta,0_I} \quad (2.31)$$

Aus den Gleichungen (2.29), (2.30) und (2.31) ergibt sich für die Grundschiwingung der induzierten Spannung im Leerlauf:

$$\begin{aligned} u_{i,0_I}(x) &= 2\pi n p \hat{\Psi}_{\delta,0_I} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \\ &= \hat{U}_{i,0_I} \sin\left(\frac{\pi}{\tau_p} x\right) \quad \text{mit Gleichung (2.27)} \end{aligned}$$

$$u_{i,0_I}(t) = \hat{U}_{i,0_I} \sin(2\pi n p t) \quad \text{mit} \quad (2.32)$$

$$\hat{U}_{i,0_I} = 4 n p w_1 \xi_I \hat{B}_{\delta,0_I} l_{\delta_i} \tau_p \quad (2.33)$$

Der Effektivwert der induzierten Spannung beträgt somit:

$$U_{i,0_I} = 2\sqrt{2} n p w_1 \xi_I \hat{B}_{\delta,0_I} l_{\delta_i} \tau_p \quad (2.34)$$

2.2.4 Widerstände, Induktivitäten und Reaktanzen

Ohmscher Wicklungswiderstand

Der ohmsche Wicklungswiderstand eines Strangs R_1 errechnet sich aus der Windungszahl eines Strangs w_1 , der mittleren Windungslänge l_{w_1} , dem spezifischen Leitwert von Kupfer κ_{Cu} und dem Kupferquerschnitt Q_{Cu} .

$$R_1 = \frac{w_1 l_{w_1}}{\kappa_{Cu} Q_{Cu_1}} \quad (2.35)$$

Symmetrische Hauptinduktivität

Unter Berücksichtigung der induktiven Kopplung ergibt sich für eine symmetrische Wicklung mit m Strängen bei konstantem Luftspalt gemäß [5] Gleichung (11.17) die folgende, für einen Strang wirksame Hauptinduktivität. Mit dem ideellen Polbedeckungsfaktor α_{p_i} .

$$L_h = \frac{m}{2} \mu_0 (w_1 \xi_I)^2 l_{\delta_i} \frac{1}{2p} \frac{4}{\pi} \frac{\tau_p}{\delta_i} \alpha_{p_i} \quad (2.36)$$

Nut- und Zahnkopfstromung

Die Nut- und Zahnkopfstromung wird durch die Summe aus relativem Nutstreuleitwert λ_n und relativem Zahnkopfstreuleitwert λ_z erfaßt. Aus [5] Gleichung (6.48b) kann die Nut- und Zahnkopfstromung für eine symmetrische m -strängige Einschichtwicklung (ohne freie Nuten) wie folgt angegeben werden:

$$L_{\sigma_{nz}} = 2\mu_0 l_{\delta_i} \frac{w_1^2}{qp} (\lambda_n + \lambda_z) \quad (2.37)$$

Der relative Nutstreuleitwert für den bei Kleinmaschinen üblichen Blechschnitt beträgt gemäß [5] Tafel 6.1, unter Vernachlässigung des Nutkeil- und Nutschlitzbereichs, sowie der Nutisolation:

$$\lambda_n = 0,6 + \frac{h_n}{3b_n} \quad (2.38)$$

Der relative Zahnkopfstreuleitwert ist [5] Bild 6.13 zu entnehmen. Die angenäherte Beziehung lautet:

$$\lambda_z = \frac{\delta}{2b_s} - \frac{1}{6} \quad (2.39)$$

Wicklungskopfstromung

Die Wicklungskopfstromung wird durch den relativen Wicklungskopfstreuleitwert λ_{WK} erfaßt. Aus [5] Gleichung (6.64) kann die Wicklungskopfstromung der Selbstinduktion eines Zweigs bzw. Strangs einer Einschichtwicklung angegeben werden. Wobei l_{WK} die einseitige Länge eines Wicklungskopfes ist. Für eine dreisträngige Einschichtwicklung im Stator gibt Vogt [5] in Tafel 6.2 den Wert 0,3 an.

$$L_{\sigma_{WK}} = 2\mu_0 l_{\delta_i} \frac{w_1^2}{p} \lambda_{WK} \quad \text{mit} \quad \lambda_{WK} = 0,3 \frac{l_{WK}}{l_{\delta_i}} \quad (2.40)$$

Induktivität der Oberwellenfelder

Da die klassische Motorberechnung lediglich die Grundwellenfelder berücksichtigt, werden die Auswirkungen der Oberwellen der Streuung zugeschlagen. Die Induktivität der Oberwellenfelder wird gemäß [5] Gleichung (6.73a) über den Streukoeffizienten der Oberwellenstreuung σ_{OW} ermittelt.

$$L_{\sigma_{OW}} = \sigma_{OW} L_h \quad (2.41)$$

Der Streukoeffizient der Oberwellenstreuung kann über die unendliche Summe der Wicklungsfaktoren der Oberschwingungen im Verhältnis zu dem Wicklungsfaktor der Grundwelle ermittelt werden.

$$\sigma_{OW} = \left(\frac{1}{\xi_I} \right)^2 \sum_{\nu \neq 3n}^{\infty} \left(\frac{\xi_\nu}{\nu} \right)^2 \quad (2.42)$$

Bei dreiphasigen Motoren werden sämtliche Harmonischen deren Ordnungszahl drei oder ein Vielfaches von drei beträgt nicht berücksichtigt, da diese nicht von außen im Strangstrom der Maschine erzwungen werden können. Bei Sternschaltung können keine entsprechenden Oberschwingungen der Spannung an die einzelnen Stränge angelegt werden, bei der Dreieckschaltung wären die entsprechenden speisenden Spannungsquellen gegenseitig kurzgeschlossen. Daraus folgt für den hier betrachteten Motor: $\nu = 5, 7, 11, 13, \dots$ Tabelle 2.1 zeigt die Oberwellenstrefaktoren für dreisträngige Einschichtwicklungen mit Lochzahlen von 1 bis 10.

| q | σ_{OW} |
|-----|---------------|
| 1 | 0,09659 |
| 2 | 0,02842 |
| 3 | 0,01405 |
| 4 | 0,00889 |
| 5 | 0,00647 |
| 6 | 0,00516 |
| 7 | 0,00436 |
| 8 | 0,00384 |
| 9 | 0,00349 |
| 10 | 0,00323 |

Tabelle 2.1: Oberwellenstrefaktoren für dreisträngige Einschichtwicklungen

Gesamtstreuinduktivität

Aus diesen drei Streuinduktivitäten ergibt sich die Gesamtstreuinduktivität L_σ .

$$L_\sigma = L_{\sigma_{nz}} + L_{\sigma_{WK}} + L_{\sigma_{OW}} \quad (2.43)$$

Stranginduktivität

Die Stranginduktivität L_1 setzt sich aus der Gesamtstreuinduktivität und der symmetrischen Hauptinduktivität zusammen.

$$L_1 = L_h + L_\sigma \quad (2.44)$$

2.3 Die belastete permanentmagnetisch erregte Synchronmaschine

2.3.1 Ankerrückwirkung

Die Grundwellenamplitude der Ankerdurchflutung, resultierend aus einem Drehstromsystem, kann gemäß [6] Gleichung (20.10) – bei Vernachlässigung der Sättigung der Eisenwege – wie folgt dargestellt werden:

$$\hat{\Theta}_1 = \frac{m}{2} \frac{4}{\pi} \frac{w_1 \xi_I}{2p} \hat{I}_1 = \frac{m w_1 \xi_I}{\pi p} \sqrt{2} I_1 \quad (2.45)$$

2.3.2 Zeigerdiagramm

Das Verhalten des belasteten Motors wird über ein Zeigerdiagramm, gemäß Abbildung 2.3, ermittelt. Hier werden für sämtliche elektrischen Größen ausschließlich deren Effektivwerte betrachtet. Lediglich für die Durchflutungen werden die Scheitelwerte verwendet (Eisensättigung). Ausgangspunkt ist der Scheitelwert der Grundwelle der Rotordurchflutung $\Theta_{PM,I}$ im Luftspalt, welche hier auf der negativen imaginären Achse zu liegen kommt. Ein Permanentmagnet kann gemäß Gleichung (1.14) durch eine äquivalente Durchflutung ersetzt werden. Sind die Querschnittsflächen von Permanentmagnet und Luftspalt nicht gleich, so muß diese Ungleichheit durch den Flußkonzentrationsfaktor N_y berücksichtigt werden. Unter der Annahme, daß die Ersatzdurchflutung des Permanentmagnets die selbe räumliche Verteilung aufweist wie die Induktion, kann deren Grundwellenamplitude gemäß Gleichung (2.21) ermittelt werden – es gilt somit auch hier der Polformkoeffizient C_I gemäß Gleichung (2.23).

$$\hat{\Theta}_{PM,I} = C_I N_y B_r \frac{h_{PM}}{\mu_0 \mu_{PM}} \quad (2.46)$$

Die Flußkonzentration kann mittels Gleichung (2.10) abgeschätzt werden, indem man die Luftspaltinduktionen für $Q_{\delta_i}/Q_{PM} = 1$ und $Q_{\delta_i}/Q_{PM} < 1$ ins Verhältnis setzt.

$$N_y = \frac{h_{PM} + \mu_{PM} k_C \delta}{\frac{Q_{\delta_i}}{Q_{PM_i}} h_{PM} + \mu_{PM} k_C \delta} \approx \frac{Q_{PM_i}}{Q_{\delta_i}} \quad \text{für } h_{PM} \gg \mu_{PM} k_C \delta \quad (2.47)$$

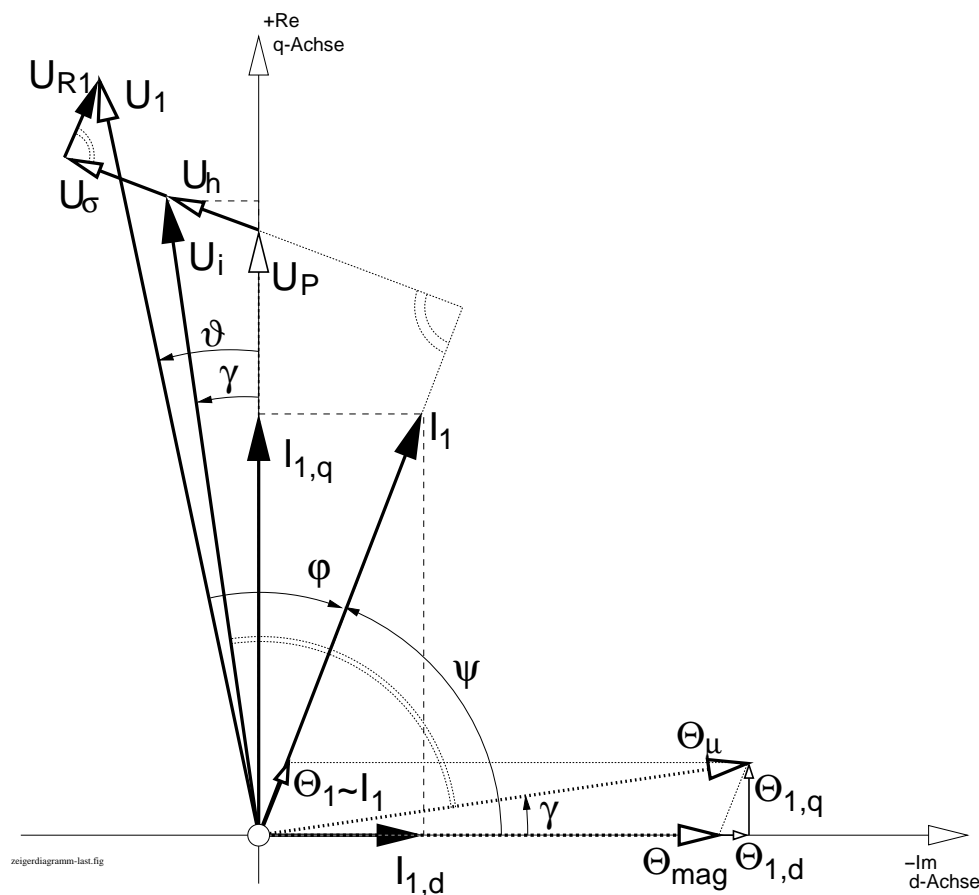


Abbildung 2.3:
Zeigerdiagramm des belasteten Motors

Bei belastetem Motor fließt ein Statorstrom I_1 . Dieser bewirkt die Durchflutung $\underline{\Theta}_1$ gemäß Gleichung (2.45). Die Durchflutung $\underline{\Theta}_1$ ist nun unter dem Phasenwinkel des Statorstromes in das Zeigerdiagramm einzutragen. Die Durchflutung $\underline{\Theta}_1$ des Ständerstromes und die Grundwelle der Durchflutung des Rotormagneten $\underline{\Theta}_{PM,I}$ spannen den Durchflutungswinkel ψ auf. Die Statordurchflutung kann nun in einen Anteil in d-Richtung, also in Richtung der Läuferlängsachse, und einen in q-Richtung, senkrecht dazu, zerlegt werden.

$$\hat{\Theta}_{1,d} = \hat{\Theta}_1 \cos \psi \quad (2.48)$$

$$\hat{\Theta}_{1,q} = \hat{\Theta}_1 \sin \psi \quad (2.49)$$

Ebenso gilt:

$$I_{1,d} = I_1 \cos \psi \quad (2.50)$$

$$I_{1,q} = I_1 \sin \psi \quad (2.51)$$

Diese Durchflutungen addieren sich zu der resultierenden Magnetisierungsdurchflutung $\underline{\Theta}_{\mu,I}$.

$$\hat{\Theta}_{\mu,I} = \sqrt{(\hat{\Theta}_{PM,I} + \hat{\Theta}_{1,d})^2 + \hat{\Theta}_{1,q}^2} \quad (2.52)$$

Diese liegt im Winkel γ zu der d-Achse, bzw. zu der $-\text{Im}$ -Achse.

$$\gamma = \arctan \frac{\hat{\Theta}_{1,q}}{\hat{\Theta}_{PM,I} + \hat{\Theta}_{1,d}} \quad (2.53)$$

Die resultierende Magnetisierungsdurchflutung erzeugt die Luftspaltinduktion $\hat{B}_{\delta,I}$. Unter Vernachlässigung der Sättigung der Eisenwege gilt:

$$\hat{B}_{\delta,I} = \hat{\Theta}_{\mu,I} \frac{\mu_0}{\delta_i} \quad (2.54)$$

Die Luftspaltinduktion, bzw. der Luftspaltfluß, induziert in der Statorwicklung die Spannung \underline{U}_i . Sie steht senkrecht auf der Magnetisierungsdurchflutung $\underline{\Theta}_{\mu,I}$ und eilt ihr um 90° el. voraus. Sie kann mittels Gleichung (2.33) ermittelt werden.

$$U_{i,I} = 2\sqrt{2} n p w_1 \xi_I \hat{B}_{\delta,I} l_{\delta_i} \tau_p \quad (2.55)$$

\underline{U}_i bildet mit der reellen Achse – bzw. mit der q-Achse – ebenfalls den Winkel γ , wobei aber das negative Vorzeichen der d-Komponente zu beachten ist! Sie kann ebenfalls in eine d- und eine q-Achsenkomponente aufgeteilt werden.

$$U_{i,d} = -U_i \sin \gamma \quad (2.56)$$

$$U_{i,q} = U_i \cos \gamma \quad (2.57)$$

Die vektorielle Multiplikation (skalares Produkt) aus \underline{U}_i und \underline{I}_1 stellt die innere Leistung des Motors dar. Für das skalare Produkt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} gilt:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle_{\vec{a},\vec{b}}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

Damit ergibt sich für die innere Leistung P_i Motors:

$$P_i = m U_i I_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \gamma - \psi\right) = m (U_{i,d} I_{1,d} + U_{i,q} I_{1,q}) \quad (2.58)$$

Zu der induzierten Spannung \underline{U}_i addiert sich der Spannungsabfall \underline{U}_σ an der Streureaktanz $X_\sigma = j\omega L_\sigma$. Dieser wird vom Statorstrom verursacht und eilt diesem somit um 90° voraus.

Zu \underline{U}_σ wird der ohmsche Statorspannungsabfall $\underline{U}_{R,1}$ addiert. Dieser ist parallel zum Statorstrom \underline{I}_1 aufzutragen. Die Summe $\underline{U}_i + \underline{U}_\sigma + \underline{U}_{R,1}$ ist die Klemmenspannung \underline{U}_1 des Motors. Sie bildet mit der Polradspannung \underline{U}_p den Polradwinkel ϑ und mit dem Statorstrom \underline{I}_1 den Phasenwinkel φ . In d- und q-Koordinaten kann sie sehr einfach angegeben werden.

$$U_{1,d} = U_{i,d} - X_\sigma I_{1,q} + R_1 I_{1,d} \quad (2.59)$$

$$U_{1,q} = U_{i,q} + X_\sigma I_{1,d} + R_1 I_{1,q} \quad (2.60)$$

Die aufgenommene elektrische Leistung ergibt sich aus der vektoriellen Multiplikation von \underline{U}_1 und \underline{I}_1 .

$$P_{el} = m U_1 I_1 \cos \varphi = m (U_{1,d} I_{1,d} + U_{1,q} I_{1,q}) \quad (2.61)$$

Literaturverzeichnis

- [1] STÖLTING, HANS-DIETER und ACHIM BEISSE: *Elektrische Kleinmaschinen*. B.G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1987.
- [2] REUTLINGER, KURT: *Mechatroniksystem für Einzelspindelantriebe in Textilmaschinen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1997.
- [3] KÜPFMÜLLER, K.: *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 13. Auflage, 1990.
- [4] RICHTER, RUDOLF: *Elektrische Maschinen erster Band*. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 3. Auflage, 1967.
- [5] VOGT, KARL: *Berechnung elektrischer Maschinen*. Reihe: Elektrische Maschinen. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1996.
- [6] MÜLLER, GERMAR: *Grundlagen elektrischer Maschinen*. Reihe: Elektrische Maschinen. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1994.