

Möglichkeiten und Grenzen der analytischen Magnetkreisberechnung

Dr.-Ing. Volker Bosch¹

25. Kleinmaschinenkolloquium, 16./17. März 2017, TU-Ilmenau.

Kurzzusammenfassung

Lange Zeit war die analytische Berechnung magnetischer Kreise ein wesentlicher Arbeitsschritt bei der Auslegung elektrischer Maschinen. Physikalisch basiert dieser auf der Anwendung des Durchflutungsgesetzes in seiner Integralform. Bereiche mit inhomogenem Feldverlauf werden durch den Carterschen Faktor abgeschätzt oder mittels magnetischer Streuleitwerte berücksichtigt.

Durch die Verfügbarkeit preisgünstiger und leistungsfähiger Computer werden die magnetischen Kreise elektrischer Maschinen heutzutage in der Regel durch die Anwendung numerischer Verfahren ausgelegt, beispielsweise mit der Finite-Elemente-Methode (FEM). Die klassischen Berechnungsmethoden geraten zunehmend in Vergessenheit – zu unrecht, bietet doch die Kombination analytischer und numerischer Verfahren zahlreiche Vorteile.

Mit diesem Ansatz können nicht nur elektrisch erregte Magnetkreise berechnet werden sondern auch permanentmagnetische. Die manuell recht aufwendige iterative Bestimmung des Arbeitspunkts kann vergleichsweise einfach durch ein Computerprogramm durchgeführt werden. Die analytische Berechnung stößt jedoch an ihre Grenzen, sobald der zu untersuchende Magnetkreis aus mehreren Maschen besteht, die über nicht-lineare Elemente gekoppelt sind. Dennoch hat die klassische Magnetkreisberechnung auch heute noch ihre Berechtigung, beispielsweise für erste Abschätzungen einer neuen elektrischen Maschine oder um eine Auslegung zu erhalten, die als Startgeometrie einer numerischen Optimierung dient.

¹ Beratender Ingenieur, Humboldtstr.21, 70771 Leinfelden-Echterdingen, www.dr-bosch.com

1 Der Cartersche Faktor

Bild 1 zeigt das Bild des Magnetfelds einer genuteten Struktur, die einer glatten Oberfläche gegenübersteht. Rechts daneben ist der Verlauf der Normalkomponente der Flussdichte (rot) im Luftspalt sowie die gemittelte Flussdichte (blau) dargestellt. Der Einbruch unter der Nut reduziert die gemittelte Luftspaltflussdichte.

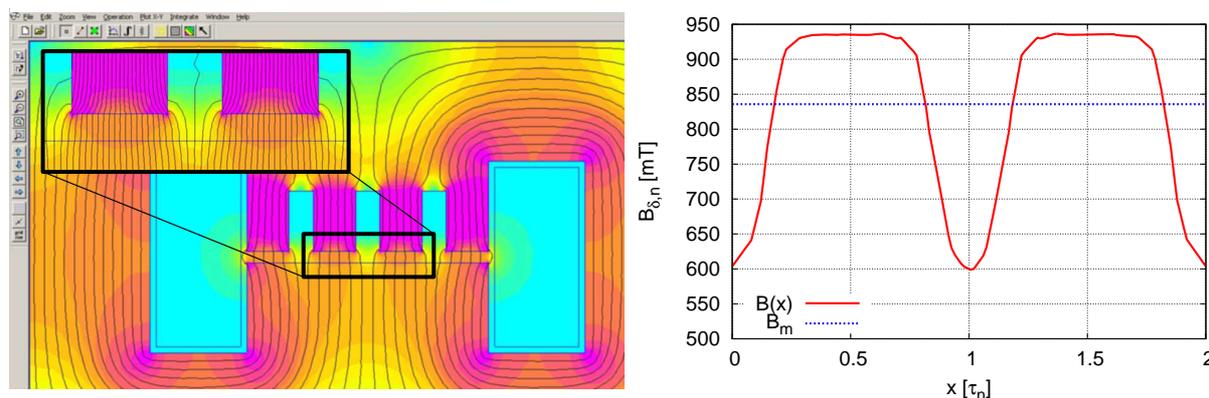


Bild 1: Verlauf der Luftspaltflussdichte unter einer genuteten Oberfläche. Links: Feldbild einer entsprechenden Versuchsanordnung. Die Erregerwicklung liegt in den großen Nuten beidseitig des Luftspalts. Rechts: Normalkomponente der Flussdichte im Luftspalt unterhalb der Nuten.

F. W. Carter berechnete zu Beginn des 20. Jahrhunderts diese Feldverzerrung mittels konformer Abbildungen und leitete daraus einen Faktor ab, der, mit der geometrischen Luftspaltweite δ multipliziert, den magnetisch wirksamen (ideellen) Luftspalt δ_i ergibt [1]. Dieser führt bei einer fiktiven glatten Oberfläche zur gleichen mittleren Luftspaltflussdichte, wie die ursprüngliche genutete Oberfläche mit dem geometrischen Luftspalt. Der Umrechnungsfaktor wird in der Literatur als *Carterscher Faktor* bezeichnet. Er berechnet sich aus der geometrischen Luftspaltweite δ , der Nutschlitzbreite b_s und der Nutteilung τ_n .

Nach diesem Prinzip kann sowohl der Einfluss der einseitigen Nutung, nur im Rotor bzw. Stator, als auch der beidseitigen Nutung elektrischer Maschinen berücksichtigt werden. Auch die Auswirkungen radialer Kühlkanäle oder axialer Polverkürzung bzw. -verlängerung auf die mittlere Luftspaltflussdichte können mit dem Carterschen Faktor ermittelt werden. Die Nutschlitzbreite wird in diesen Fällen durch die axiale Weite der Kühlkanäle bzw. den Betrag der Differenz von Anker- und Polbreite ersetzt. Anstelle der Nutteilung wird der axiale Abstand der Kühlkanäle bzw. die axiale Länge von Erregerpol oder Anker verwendet, vgl. [2], Tafel 5.2. Der Cartersche Faktor, bzw. das Produkt der verschiedenen Faktoren, wird mit dem geometrischen Luftspalt multipliziert und ergibt so den magnetisch wirksamen Luftspalt.

Bei der Anwendung des Carterschen Faktors ist jedoch zu beachten, dass in den Lehrbüchern unterschiedliche Definitionen verwendet werden. Richter [3] berechnet ihn wie folgt:

$$k_c = \frac{\tau_n}{\tau_n - \gamma \delta} \quad \text{mit} \quad \gamma \approx \frac{\left(\frac{b_s}{\delta}\right)^2}{5 + \frac{b_s}{\delta}} \quad \text{für} \quad 1 < \frac{b_s}{\delta} < \infty \quad (1)$$

Nürnberg [4] gibt eine abweichende Definition an. Im Gegensatz zu Richter verwendet er in seiner Formel die Nutschlitzbreite b_s anstatt der geometrischen Luftspaltweite δ :

$$k_c = \frac{\tau_n}{\tau_n - y b_s} \quad \text{mit} \quad y \approx \frac{b_s}{5\delta + b_s} \quad (2)$$

Diese Definition findet sich auch bei Vogt [2], der die Hilfsfunktion, die Nürnberg y nennt, mit dem Formelzeichen γ bezeichnet. Vogts Bezeichnung entspricht somit der von Richter [3] gewählten, obwohl Vogts Definition des Carterschen Faktors von dieser abweicht.

Zwischen Richter und Nürnberg differieren auch die exakten Formeln der Funktion γ bzw. y . Bei Richter lautet diese:

$$\gamma = \frac{4}{\pi} \left[\frac{b_s}{2\delta} \arctan \frac{b_s}{2\delta} - \ln \sqrt{1 + \left(\frac{b_s}{2\delta}\right)^2} \right] \quad (3)$$

Nürnberg stellt die Formel um, indem er die Wurzelfunktion als Faktor $1/2$ aus dem Logarithmus herauszieht. Der Grund für die Umformung dürfte die vereinfachte Berechnung mit Rechenschieber und Logarithmentafel sein.

$$y = \frac{2}{\pi} \left[\arctan x - \frac{\ln(1 + x^2)}{2x} \right] \quad \text{mit} \quad x = \frac{b_s}{2\delta} \quad (4)$$

Schuisky [5] und Klamt [6] verwenden die Definition nach Richter. Beide begnügen sich mit der Angabe eines Näherungswerts für die Funktion γ .

Die Definition des Carterfaktors nach Binder [7] entspricht der von Richter gewählten:

$$k_c = \frac{\tau_n}{\tau_n - \zeta(h) \delta} \quad \text{mit} \quad h = \frac{b_s}{\delta} \quad (5)$$

$$\zeta(h) = \frac{2}{\pi} \left(h \arctan \frac{h}{2} - \ln \left[1 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right] \right) \approx \frac{h^2}{h + 5} \quad (6)$$

Wie Nürnberg zieht er die Wurzel, die unter dem Logarithmus steht, als Faktor $1/2$ vor diesen. Davon abgesehen entspricht Binders Funktion $\zeta(h)$ der Hilfsfunktion γ nach Richter.

Alle hier vorgestellten Formeln führen zum selben Ergebnis, solange jede Definition des Carterschen Faktors k_c ausschließlich mit der zugehörigen Hilfsfunktion γ , y oder $\zeta(h)$ verwendet wird, also nur die Gleichungen (1) und (3) oder die Gleichungen (2) und (4) bzw. die Gleichungen (5) und (6) miteinander kombiniert werden.

2 Der magnetische Kreis leerlaufender Maschinen

2.1 Die elektrisch erregte Maschine

Die Nachrechnung des magnetischen Kreises einer elektrischen Maschine erfolgt üblicherweise unter Anwendung des Durchflutungsgesetzes in seiner Integralform.

$$V_o = \oint H ds = \Theta \quad (7)$$

Die magnetische Umlaufspannung V_o , bzw. die Summe der magnetischen Spannungsabfälle in einer geschlossenen Masche des magnetischen Kreises ist gleich dem Ringintegral über der magnetischen Feldstärke H , das gleich der umschlossenen Durchflutung Θ ist.

Der magnetische Kreis wird in Teilabschnitte zerlegt, die den einzelnen konstruktiven Elementen der elektrischen Maschine entsprechen. Der magnetische Spannungsabfall V_m längs eines solchen Teilabschnitts mit der magnetisch wirksamen Länge l beträgt:

$$V_m = \int_l H ds \quad (8)$$

Üblicherweise wird der magnetische Spannungsabfall entlang der mittleren magnetischen Feldlinie berechnet, die das Element durchdringt. Ist das Magnetfeld im betrachteten Bereich homogen, so kann die Integration durch die Multiplikation mit der Weglänge l ersetzt werden, welche die Feldlinie im betrachteten Element zurücklegt.

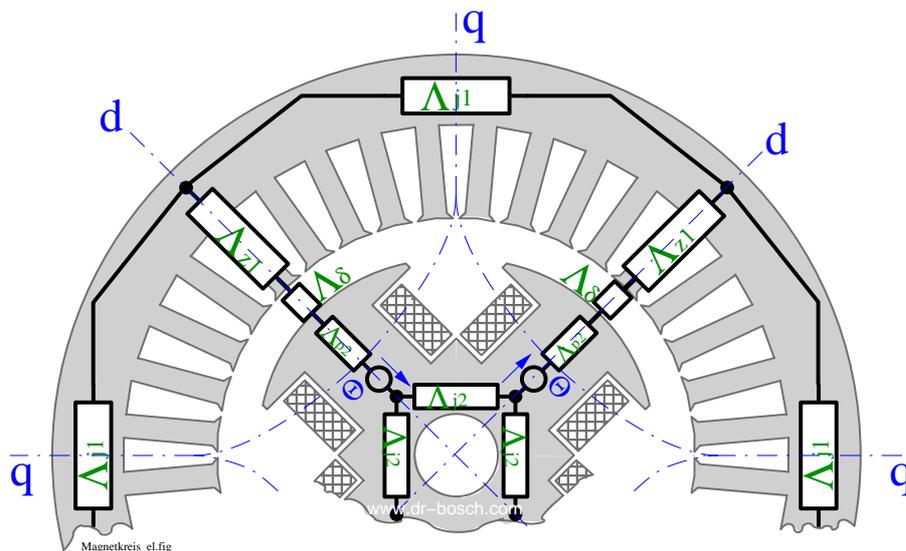


Bild 2: Magnetischer Kreis einer leerlaufenden elektrisch erregten Synchronmaschine.

Für die Berechnung einer elektrisch erregten Synchron- oder Gleichstrommaschine werden die folgenden Baugruppen betrachtet, die in Bild 2 für eine Synchronmaschine dargestellt sind: *Erreger- bzw. Rotorjoch* ($j2$), *Polschenkel bzw. Polkern* ($p2$), *Anker- bzw. Statorzähne* ($z1$), *Anker- bzw. Statorjoch* ($j1$) und *Luftspalt* (δ). Polschuhe und Zahnköpfe werden hier aufgrund ihrer vergleichsweise geringen wirksamen Länge für die Feldlinien vernachlässigt.

2.1.1 Luftspalt

Die analytische Berechnung der Polradspannung benötigt die Grundwellenamplitude \widehat{B}_1 der Flussdichte $B(x)$ im Luftspalt einer elektrischen Maschine. Für die hier beschriebene Bestimmung des Arbeitspunkts eines magnetischen Kreises interessiert jedoch die über der Polbreite $b_p = \alpha_i \tau_p$ gemittelte Flussdichte. Der Faktor α_i bezeichnet hier den ideellen Polbedeckungsfaktor. Bei einer elektrischen Maschine mit Rechteckpolen, d.h. mit konstanter Luftspaltweite über den Polschuhen, ergibt sich in guter Näherung eine rechteckförmige Verteilung der Flussdichte. Diese nimmt über den Polschuhen den Wert B_{max} an, wie in Bild 3 skizziert.

Die Umrechnung der rechteckförmigen Verteilung in eine sinusförmige Grundwelle mit der Amplitude \widehat{B}_1 erfordert streng genommen eine Fourieranalyse. In erster Näherung kann jedoch auch der folgende, stark vereinfachte Ansatz gewählt werden: Die über eine Polteilung gemittelte Flussdichte besitzt den Wert $B_m = \alpha_i B_{max}$. Durch Multiplikation mit dem Faktor $\pi/2$ errechnet sich aus der rechteckförmigen Verteilung die Amplitude einer flächengleichen sinusförmigen Verteilung identischer Breite. Somit gilt in diesem Fall näherungsweise für die Amplitude der Grundwelle:

$$\widehat{B}_1 \approx \frac{\pi}{2} B_m = \frac{\pi}{2} \alpha_i B_{max} \quad (9)$$

Ist der Luftspalt über den Polschuhen nicht konstant, beispielsweise bei sogenannten *Sinuspolen*, muss für die Umrechnung der entsprechende Polformkoeffizient berücksichtigt werden [2, 8].

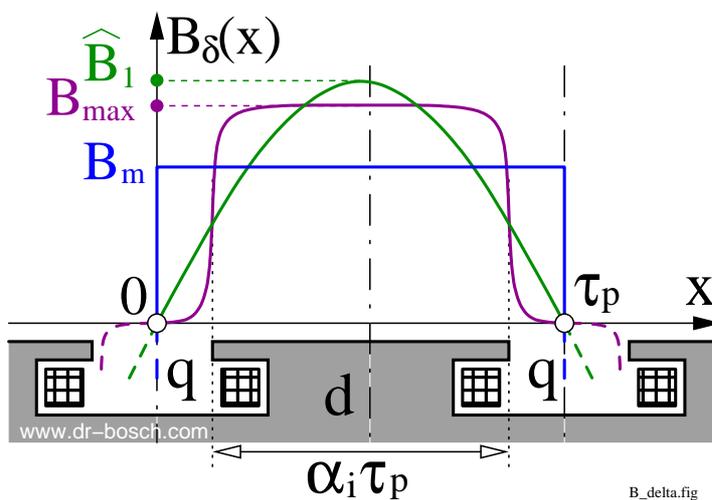


Bild 3: Umrechnung der sinusförmigen Luftspaltflussdichte B_δ in eine flächengleiche rechteckförmige Verteilung B_{max} über einem Polschuh.

Die Umrechnung der Flussdichteverteilung kann heutzutage auch vergleichsweise einfach numerisch erfolgen. Die mittlere Flussdichte wird mittels *numerischer Integration* bzw. Summation bestimmt [9]. Eine *diskrete Fouriertransformation (DFT)* [10] oder *schnelle Fouriertransformation (FFT)* [9] liefert neben der Grundwellenamplitude auch noch weitere Oberwellen, die für die Auslegung der Maschine von Interesse sind. Für die dafür

erforderliche Berechnung der räumlichen Verteilung der Flussdichte im Luftspalt, wird dieser in mehrere Flussröhren aufgeteilt, die dem Verlauf der Feldlinien folgen. Die Oberfläche des Erregerpolschuhs und die fiktive glatte Ankeroberfläche, die aus der Anwendung des Carterschen Faktors resultiert, werden als Äquipotentialflächen betrachtet. So kann die Verteilung der Flussdichte punktweise ermittelt werden.

2.1.2 Berechnung des Magnetkreises

Um den magnetischen Kreis einer elektrisch erregten Maschine zu berechnen, wird meist die gewünschte Flussdichte im Luftspalt vorgegeben und die dazu erforderliche Durchflutung der Erregerwicklung bestimmt. Hierzu wird der magnetische Spannungsabfall in den einzelnen Baugruppen der Maschine entlang der mittleren Feldlinie ermittelt. Aus Symmetriegründen genügt es, nur einen halben Umlauf zu betrachten, von der Mitte des Rotorjochs bis zur Mitte des Statorjochs. Die Berechnung des magnetischen Kreises erfolgt in diesen Schritten:

1. Das angenommene homogene Magnetfeld mit der Flussdichte B_{max} im Luftspalt über den Polschuhen kann mit der ideellen Luftspaltfläche eines Pols $A_{\delta,i} = l_i \alpha_i \tau_p$ in den mittleren Luftspaltfluss Φ_δ umgerechnet werden. Die ideelle (axiale) Luftspaltlänge l_i berücksichtigt die Aufweitung des Luftspalts im Stirnbereich sowie eine mögliche Polverlängerung oder -verkürzung. Mit der wirksamen Luftspaltweite, die neben dem Carterschen Faktor auch ggf. die Polform berücksichtigt, kann nun der magnetische Leitwert des Luftspalts ermittelt werden. Dieser erlaubt die Berechnung des mittleren magnetischen Spannungsabfalls V_δ über dem Luftspalt aus dem zuvor berechneten gemittelten Luftspaltfluss.
2. Unter Vernachlässigung der Streuung durchquert der zuvor ermittelte Luftspaltfluss Φ_δ einen Erregerpol und die Ankerzähne einer Polteilung τ_p . Die Joche in Stator und Rotor werden jeweils vom halben Luftspaltfluss durchsetzt, da sich dieser auf zwei parallele Zweige aufteilt.
3. Über die effektiven Querschnittsflächen A_\perp , die senkrecht zu den Feldlinien durch die jeweiligen Bauteile verläuft, werden die zugehörigen magnetischen Flussdichten bestimmt. Bei Bauteilen, die entlang der Feldlinien keine konstante Querschnittsfläche aufweisen, werden die Flussdichten B_1 , B_2 und B_3 an Anfang, Mitte und Ende des Elements bestimmt.
4. Mit der Magnetisierungskurve $H(B)$ des jeweiligen Bauteils wird die mittlere magnetische Feldstärke H über diesem Element bestimmt. Aus der magnetisch wirksamen Länge l des Bauteils kann nun die magnetische Spannung $V_m = H l$ errechnet werden, die über diesem abfällt. Ist der Querschnitt des Bauteils nicht konstant, das Magnetfeld also inhomogen, so wird die mittlere Feldstärke durch Anwendung der

Simpsonschen Formel bzw. der *Keplerschen Fassregel* abgeschätzt:

$$V_m = \frac{1}{6} \left(H(B_1) + 4H(B_2) + H(B_3) \right) \quad (10)$$

5. Die Summe aller magnetischen Spannungsabfälle entlang der betrachteten Feldlinie ergibt die Durchflutung Θ der Erregerwicklung, die erforderlich ist um die angenommene Flussdichte im Luftspalt zu erzeugen.

Soll die zu einer vorgegebenen Erregerdurchflutung gehörende Luftspaltflussdichte ermittelt werden, so muss die Berechnung des Arbeitspunkts iterativ erfolgen. Hierbei wird der Luftspaltfluss nach jeder Berechnung entsprechend der Abweichung von errechneter und vorhandener Durchflutung korrigiert. Als Startwert kann der Luftspaltfluss $\Phi_{\delta,0} = \Theta \Lambda_\delta$ angenommen werden, der sich einstellen würde, wenn die Erregerdurchflutung ausschließlich auf den Luftspalt wirken würde.

Ist die berechnete Durchflutungssumme größer als die tatsächlich vorhandene Erregerdurchflutung, wird der Luftspaltfluss für die nächste Berechnung vermindert; ist sie kleiner, wird er vergrößert. Da es sich hier um ein nichtlineares System handelt, muss die Änderung des Luftspaltflusses gedämpft erfolgen. Ansonsten kann sich ein *stabiler Grenzyklus* ausbilden, der um den tatsächlichen Arbeitspunkt schwingt und nicht konvergiert oder gar divergiert.

Berechnungsvorschrift und Anpassung des Luftspaltflusses werden solange wiederholt, bis die Summe aller magnetischen Spannungsabfälle der vorhandenen Erregerdurchflutung mit hinreichender Genauigkeit entspricht. Diese Berechnung stellt eine (nichtlineare) *Nullstellensuche* dar. Die Summe aus magnetischen Spannungsabfällen und Erregerdurchflutung ist im Arbeitspunkt des magnetischen Kreises Null. Das Vorgehen entspricht der *Maschenstromanalyse* eines elektrischen Netzwerks, die hier jedoch aufgrund der nichtlinearen Magnetisierungskurve iterativ erfolgen muss. Für die Umsetzung in Software bietet sich die Anwendung numerischer Verfahren zur Nullstellensuche einer reellen Funktion an, wie beispielsweise das *Zeroin-Verfahren* [9].

2.1.3 Zahn- und Joch-Entlastung

Die Abschnitte, die das magnetische Feld in den *Luftwegen* parallel zu Zahn und Joch zurücklegt, kann durch die Parallelschaltung eines konstanten magnetischen Leitwerts Λ_e zu dem magnetischen Leitwert Λ_{fe} eines solchen Zahn- oder Joch-Elements berücksichtigt werden, wie in Bild 4 (links) dargestellt. Die entsprechenden Leitwerte können der Literatur für die unterschiedlichen Nut-, Zahn- und Polgeometrien entnommen werden [3, 8, 11, 4, 5]. Diese wurden teilweise empirisch ermittelt, beispielsweise durch maßstäbliche Nachbildung der jeweiligen Geometrie aus Widerstandspapier oder aus dünner Metallfolie [5]. Diese Methode ist sozusagen der Vorläufer unserer heutigen numerischen Berechnung magnetischer Felder.

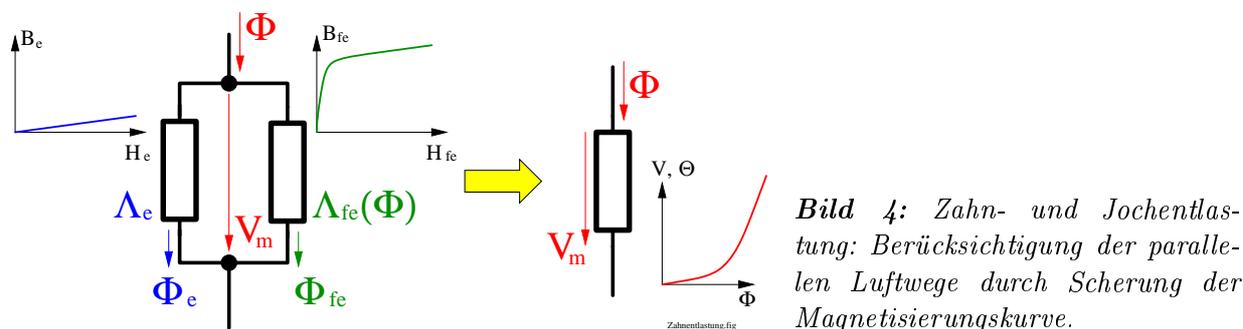


Bild 4: Zahn- und Jochentlastung: Berücksichtigung der parallelen Luftwege durch Scherung der Magnetisierungskurve.

Die Parallelschaltung von Elementen des magnetischen Kreises ist jedoch bei Anwendung der Maschenanalyse nicht ohne weiteres möglich, sobald mindestens eines der parallel geschalteten Elemente eine nichtlineare Magnetisierungskurve besitzt. Der magnetische Maschenstrom Φ teilt sich entsprechend der Leitwerte auf beide Elemente auf. Jedoch hängt diese Aufteilung dann aufgrund der nichtlinearen Magnetisierungskurve vom Arbeitspunkt dieses Elements ab.

Sinnvoller wäre dann die Vorgabe einer Potentialdifferenz über die parallel geschalteten Elemente. Dieser Ansatz führt jedoch zur Anwendung der *Knotenpotentialanalyse*, mit der Konsequenz, dass die eine Gleichung der Maschenanalyse durch ein System (nichtlinearer) Gleichungen ersetzt werden muss. Damit erhöht sich der Aufwand für die Ermittlung des Arbeitspunkts drastisch.

Die klassische Berechnung arbeitet mit einem Ansatz, der in der Literatur als *Zahn- bzw. Joch-Entlastung* bezeichnet wird. In einem ersten Schritt wird, wie zuvor beschrieben, aus dem Fluss Φ_{fe} , der das Element durchsetzt und der wirksamen Querschnittsfläche A_{fe} , die mittlere Flussdichte ermittelt, die in diesem Element herrscht. Diese Flussdichte wird als scheinbare Flussdichte B'_{fe} bezeichnet:

$$B'_{fe} = \frac{\Phi_{fe}}{A_{fe}} \quad (11)$$

Anschließend muss der magnetische Spannungsabfall V_{fe} über dem Element bestimmt werden. Hierzu wird der Magnetisierungskurve die zur ermittelten scheinbaren Flussdichte B'_{fe} gehörende magnetische Feldstärke $H_{fe}(B'_{fe})$ entnommen und mit der effektiven Länge l_{fe} des Elements multipliziert:

$$V_{fe} = H_{fe} l_{fe} \quad (12)$$

Dieser magnetische Spannungsabfall liegt auch an dem parallel geschalteten magnetischen Leitwert Λ_e an und treibt den magnetischen Fluss Φ_e durch diesen:

$$\Phi_e = V_{fe} \Lambda_e \quad (13)$$

Der zum Zahn oder Jochsegment parallel fließende magnetische Fluss wird näherungsweise durch die Verminderung der Flussdichte im betrachteten Element berücksichtigt. Es ergibt

sich somit die angenäherte Flussdichte B_{fe} in dem betrachteten Element:

$$B_{fe} = B'_{fe} - \frac{\Phi_e}{A_{fe}} \quad (14)$$

Für die Vereinfachung der manuellen Berechnung fasst die klassische Berechnung Parallelleitwert und Zahnquerschnitt zum sogenannten *Entlastungsfaktor* zusammen und reduziert die Anzahl der durchzuführenden Rechenschritte.

In Bild 4 (rechts) ist ein weiter Ansatz dargestellt, der nicht auf einer Näherung basiert. Aus der Magnetisierungskurve des nichtlinearen Zahn- oder Joch-Elements und dem parallel geschalteten konstanten Leitwert des Luftweges wird die resultierende Funktion $\Theta(\Phi)$ erzeugt, die den magnetischen Spannungsabfall über den beiden parallel geschalteten Elementen, bzw. den Durchflutungsbedarf in Abhängigkeit von dem durch die Parallelschaltung fließenden magnetischen Fluss darstellt.

Für die Ermittlung der Kennlinie werden der Magnetisierungskurve verschiedene Punkte (H_i, B_i) entnommen. Die Feldstärke H_i wird mit der effektiven Länge l_{fe} des Elements in die magnetische Spannung $V_{m,i} = H_i l_{fe}$ umgerechnet. Da diese auch an dem parallel geschalteten Leitwert Λ_e anliegt, kann nun der Parallelfluss $\Phi_{e,i} = \Lambda_e V_{m,i}$ berechnet werden. Aus der Flussdichte B_i wird mit der effektiven Querschnittsfläche A_{fe} des Elements der magnetische Fluss $\Phi_{fe} = B_i A_{fe}$ durch dieses ermittelt. Der Gesamtfluss $\Phi_i = \Phi_{fe,i} + \Phi_{e,i}$ durch die Parallelschaltung ist somit die Summe der beiden Teilflüsse. Nun liegt der entsprechende Punkt $(\Phi_i, V_{m,i})$ der gesuchten Kurve fest. Dieses Vorgehen ist in Bild 5 dargestellt. Es wird in der Literatur auch als *Scherung* der Magnetisierungskurve bezeichnet.

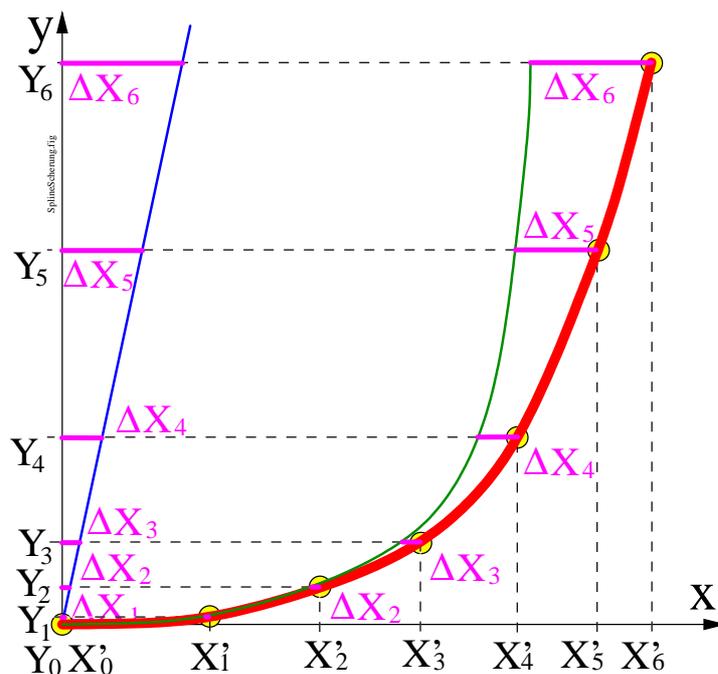


Bild 5: Die Umkehrfunktion $H(B)$ einer Magnetisierungskurve (dünne hellgrüne Linie) wird mit der blauen Arbeitsgeraden des konstanten magnetischen Leitwerts des parallelen Luftwegs geschert. Es ergibt sich die rote Kurve.

Ist die Magnetisierungskurve des betrachteten weichmagnetischen Werkstoffs als $H(B)$ -Kurve in Form kubischer Splines hinterlegt, kann die benötigte $\Theta(\Phi)$ -Kennlinie sehr einfach durch Verschiebung und Skalierung der x-Koordinaten und durch eine Skalierung der y-Koordinaten der Stützstellen erzeugt werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die restlichen drei Koeffizienten-Sätze der kubischen Splinepolynome ebenfalls transformiert werden müssen. Dazu werden die Koeffizienten mit zwei Korrekturfaktoren multipliziert. Der erste Faktor kompensiert die Dehnung bzw. Stauchung der Intervalle auf der x-Achse sowie die Skalierung der x-Koordinaten. Dieser Faktor muss entsprechend der Ordnung des jeweiligen Koeffizienten potenziert werden. Die Skalierung der y-Koordinaten erfolgt durch Multiplikation der Koeffizienten mit dem entsprechenden Faktor. Dieser wird nicht potenziert.

2.2 Die permanentmagnetisch erregte Maschine

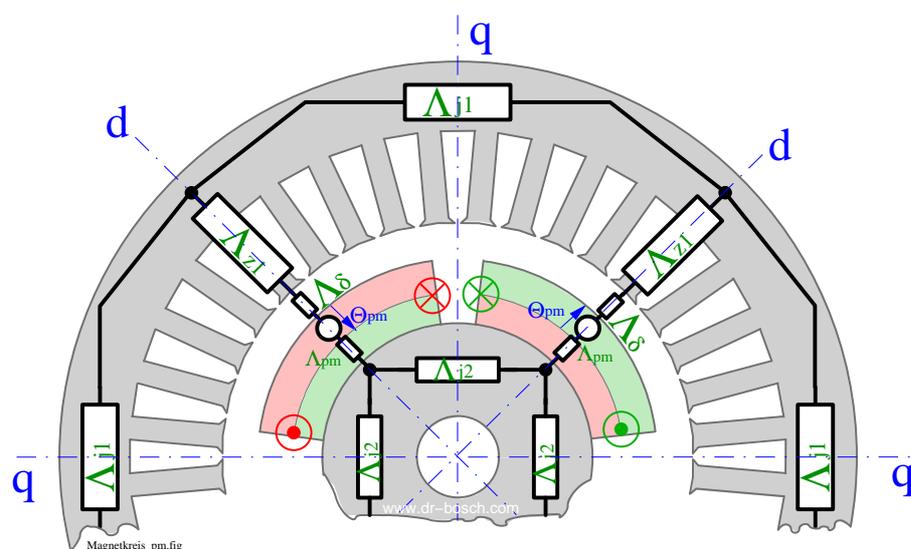


Bild 6: Magnetischer Kreis einer leerlaufenden permanentmagnetisch erregten Maschine.

Der magnetische Kreis einer permanentmagnetisch erregten Maschine kann auf die selbe Art und Weise berechnet werden wie der einer elektrisch erregten Maschine. Hierzu wird der Permanentmagnet durch den magnetisch wirksamen Luftspalt δ_{pm} und die elektrische Ersatzdurchflutung Θ_{pm} ersetzt, wie in [12] erläutert. Mit der Remanenzflussdichte B_r , der relativen Permeabilität μ_{pm} und der geometrischen Höhe h_{pm} des Permanentmagnets ergibt sich für einen Oberflächenmagnet:

$$\delta_{pm} = \frac{h_{pm}}{\mu_{pm}} \quad (15)$$

$$\Theta_{pm} = B_r \frac{h_{pm}}{\mu_0 \mu_{pm}} \quad (16)$$

Für die Berechnung ist zu beachten, dass die magnetisch wirksame Polbreite eines Oberflächenmagnets bei der hier vorgestellten Berechnungsmethode aufgrund der Streuung an

den Polkanten geringer ist als dessen geometrische Breite. Bei der Verwendung einzelner Permanentmagnet-Segmente kann eine Reduzierung der Polbreite um die halbe Magnethöhe als erster Anhaltspunkt angesetzt werden. Bei radial mehrpolig magnetisierten Ringen liegt die Verminderung der Polbreite in der Größenordnung der Wandstärke des Rings.

Mit der magnetisch wirksamen Polbreite b_{pm} kann nun der ideelle Polbedeckungsfaktor $\alpha_i = b_{pm}/\tau_p$ bestimmt werden. Die weiteren Berechnungsschritte des magnetischen Kreises entsprechen nun denen der elektrisch erregten Maschine. Jedoch muss die Berechnung iterativ erfolgen, indem der angenommene magnetische Fluss in der betrachteten Masche variiert wird. Im Arbeitspunkt ist die Summe der magnetischen Spannungsabfälle über Luftspalt, Zähnen, Rotor-, Statorjoch und dem Permanentmagnet gleich der Ersatzdurchflutung des Permanentmagnets.

Ist der magnetische Fluss im Arbeitspunkt bestimmt, kann aus diesem die Flussdichte im Luftspalt bestimmt werden und daraus, wie bei der elektrisch erregten Synchronmaschine, die Grundwellenamplitude, die für die Berechnung der Polradspannung benötigt wird.

2.3 Die Maschine mit vergrabenen Magneten

Die Berechnung des magnetischen Kreises einer permanentmagnetisch erregten Maschine, deren Magnete in Taschen im Rotorjoch angeordnet sind, sog. *vergrabene Magnete*, ähnelt der Vorgehensweise bei der Maschine mit Oberflächenmagneten. Der magnetische Fluss Φ_{pm} , der einen der Dauermagnete durchdringt, wird vorgegeben und iterativ dem Arbeitspunkt angenähert. Für die Ermittlung des Luftspaltflusses muss jedoch der magnetische Streufluss Φ_s ermittelt werden, der über die Streustege fließt, welche die *Polschuhe* verbinden. Der zu ermittelnde Streufluss überquert den Luftspalt nicht und hat somit keinen Einfluss auf die Polradspannung der Maschine. Als Polschuh wird hier der Teil des Rotorjochs bezeichnet, der sich zwischen Magnet und Luftspalt befindet. Der Polschuh bildet gemeinsam mit dem Rotorjoch und den beiden Streustegen die Tasche, in welcher der Magnet angeordnet ist.

Für die Berechnung wird die mittlere Weite der Feldlinien w_s in einem Streusteg, die einem Magnet zugeordnet werden kann und die mittlere Querschnittsfläche A_s des Stegs abgeschätzt. Der Einfluss der radial verlaufenden Stege, welche die Streustege mit dem Rotorjoch verbinden, kann im Leerlauf vernachlässigt werden, da sich diese radial angeordneten Stege in der Symmetrieachse des magnetischen Kreises zwischen zwei benachbarten Polen befinden und die somit auf einer Äquipotentiallinie liegen.

Die Oberflächen von Rotorjoch und Polschuhen, an welche die Magnete angrenzen, können als Äquipotentialflächen angesehen werden. Diese Bereiche sind üblicherweise nicht gesättigt, da die Remanenzflussdichte der Magnetwerkstoffe in der Regel unter der Sättigungsflussdichte von Elektrolech liegt. Somit liegt über den Streustegen in guter Näherung die selbe magnetische Spannung V_{pm} , wie über dem Magnet. Diese berechnet sich aus der Differenz der Ersatzdurchflutung des Magnets Θ_{pm} und dem magnetischen Spannungsabfall

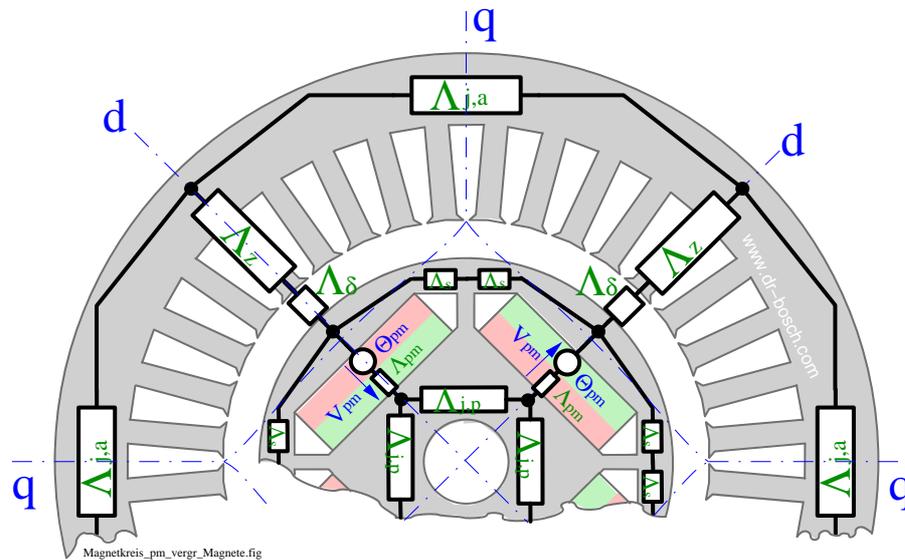


Bild 7: Magnetischer Kreis einer leerlaufenden permanentmagnetisch erregten Maschine mit vergrabenen Magneten.

über dem Ersatzleitwert Λ_{pm} des Magnets:

$$V_{pm} = \Theta_{pm} - \frac{\Phi_{pm}}{\Lambda_{pm}} \quad \text{mit} \quad (17)$$

$$\Theta_{pm} = B_r \frac{h_{pm}}{\mu_0 \mu_{pm}} \quad \text{und} \quad (18)$$

$$\Lambda_{pm} = \mu_0 \mu_{pm} \frac{A_{pm}}{h_{pm}} \quad (19)$$

Über die für einen Pol wirksame magnetische Weite w_s eines Streustegs und der an ihm anliegenden magnetischen Spannung V_{pm} kann die magnetische Feldstärke H_s über dem Streusteg berechnet werden:

$$H_s = \frac{V_{pm}}{w_s} \quad (20)$$

Aus der Magnetisierungskurve des verwendeten Elektroblechs wird nun die zugehörige mittlere Flussdichte B_s im Streusteg ermittelt, mit welcher der magnetische Streufluss Φ_s durch Multiplikation mit der mittleren Querschnittsfläche A_s des Stegs berechnet werden kann:

$$\Phi_s = B_s A_s \quad (21)$$

Der Luftspaltfluss Φ_δ ist nun der Fluss durch den Magnet Φ_{pm} , abzüglich der Streuflüsse Φ_s durch die beiden Stege, die den Polschuh über dem betrachteten Magnet fixieren:

$$\Phi_\delta = \Phi_{pm} - 2\Phi_s \quad (22)$$

Die weitere Berechnung des magnetischen Kreises entspricht nun der Berechnung einer elektrisch erregten Maschine, wie in Abschnitt 2.1 besprochen.

2.4 Ersatzschaltbild einer Synchron- oder EC-Maschine

Ist die Flussdichte im Luftspalt einer Synchron- oder EC-Maschine bzw. eines BLDC-Motors bekannt, kann die Polradspannung der Maschine berechnet werden. Für diese sowie für die Berechnung der Induktivitäten und Wicklungswiderstände stellt die klassische Berechnung elektrischer Maschinen geeignete Formeln bereit. Somit können nun sämtliche Elemente des Ersatzschaltbilds der Synchron- bzw. BLDC- oder EC-Maschine gemäß Bild 8 bestimmt werden.

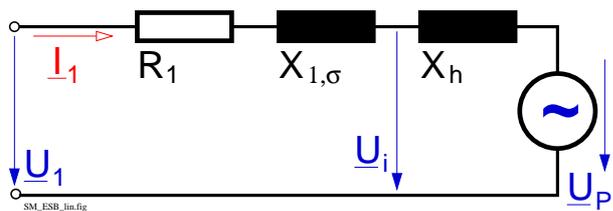


Bild 8: Ersatzschaltbild der ungesättigten permanentmagnetisch erregten Synchronmaschine.

Dieses Ersatzschaltbild gilt jedoch nur für ungesättigte Maschinen, da die Spannung U_i , welche der Luftspaltfluss in der Statorwicklung induziert, in zwei fiktive und scheinbar unabhängige Spannungen aufgeteilt wird: die *Polradspannung* U_p , die ausschließlich vom Erregerfeld in der Ankerwicklung induziert wird und die *Ankerrückwirkung* $X_h I_1$. Bei einer gesättigten Maschine kann das Luftspaltfeld in der Maschine aufgrund der nichtlinearen Magnetisierungskurve nicht als Überlagerung zweier unabhängiger Teilfelder betrachtet werden. Der Überlagerungssatz gilt in diesem Fall nicht!

3 Ankerrückwirkung – der magnetische Kreis belasteter elektrischer Maschinen

Für die Berechnung des magnetischen Kreises einer belasteten elektrischen Maschine wird die Ankerdurchflutung vektoriell in zwei Komponenten zerlegt. Die Achsen dieser Zerlegung werden durch die Lage des Erregersystems zum Anker im betrachteten Zeitpunkt vorgegeben. Die Längsachse des Erregers, in welcher die Erregerdurchflutung wirkt, wird als d-Achse (engl.: *direct axis*) bezeichnet. Die dazu (elektrisch) senkrecht stehende Querachse ist die q-Achse (engl.: *quadrature axis*).

Diese Aufteilung auf zwei magnetisch unabhängige Achsen und die daraus resultierende Zerlegung des magnetischen Kreises in zwei unabhängige Maschen, ist im genuteten Anker zulässig, wenn dieser über eine ausreichend große Anzahl von Zähnen verfügt und der magnetische Kreis der Maschine ungesättigt ist. Prinzipiell würden zwei Zähne pro Pol für eine solche Zerlegung ausreichen. Da sich jedoch d- oder q-Achse auch zeitweise unter einer Nut befinden können, so dass die in dieser Achse wirkende Durchflutung auf die beiden, die Nut flankierenden Zähne aufgeteilt wird, sollten mindestens drei Zähne pro Polteilung vorhanden sein.

3.1 Magnetisch symmetrische Maschinen

Der magnetische Kreis einer belasteten elektrischen Maschine mit magnetisch symmetrischem Aufbau, wie Vollpol-Synchronmaschinen oder permanentmagnetisch erregte Synchron- bzw. EC- oder BLDC-Maschinen mit Oberflächenmagneten, kann noch vergleichsweise einfach berechnet werden. Bild 9 zeigt den magnetischen Kreis einer entsprechenden Maschine.

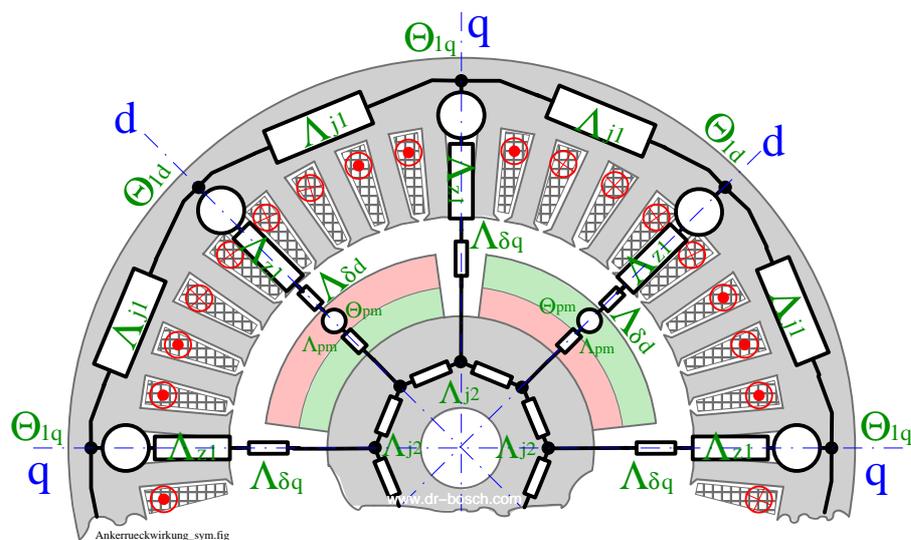


Bild 9: Der magnetische Kreis einer belasteten elektrischen Maschine mit Oberflächenmagneten.

Es ergeben sich zwei Maschen, eine in der d-Achse und die zweite in der q-Achse der Maschine. Diese sind über die Joche von Stator und Rotor miteinander gekoppelt. Nur wenn diese Jochabschnitte magnetisch ungesättigt sind, können die beiden Maschen unabhängig voneinander betrachtet werden.

In der Literatur erfolgt die analytische Berechnung des magnetischen Kreises einer belasteten elektrischen Maschine oftmals über die sog. *Übertrittskennlinie*. Diese fasst den magnetisch wirksamen Luftspalt und die Eisenwege zu einer gescherten Magnetisierungskurve zusammen und stellt so den Zusammenhang zwischen der Ankerdurchflutung in d- und q-Achse, Erregerdurchflutung und Luftspaltfluss bzw. Luftspaltflussdichte her.

3.2 Magnetisch unsymmetrische Maschinen

Elektrische Maschinen mit magnetisch unsymmetrischem Aufbau, der sogenannten *magnetischen Einachsigkeit*, weisen unterschiedliche magnetische Leitwerte in d- und q-Achse der Maschine auf. In Anlehnung an die Schenkelpol-Synchronmaschine wird diese Eigenschaft auch als *Schenkligkeit* bezeichnet. Auch Maschinen mit vergrabenen Magneten sind magnetisch unsymmetrisch und zeigen das Verhalten einer Schenkelpolmaschine.

Bei einer solchen Maschine ist eine getrennte Betrachtung von d- und q-Achse aufgrund der unterschiedlichen magnetisch wirksamen Luftspalte notwendig. Bild 10 zeigt den magnetischen Kreis einer entsprechenden EC-Maschine mit vergrabenen Magneten. Hier sind d- und q-Masche über Ankerjoch und Erregerpolschuh miteinander gekoppelt.

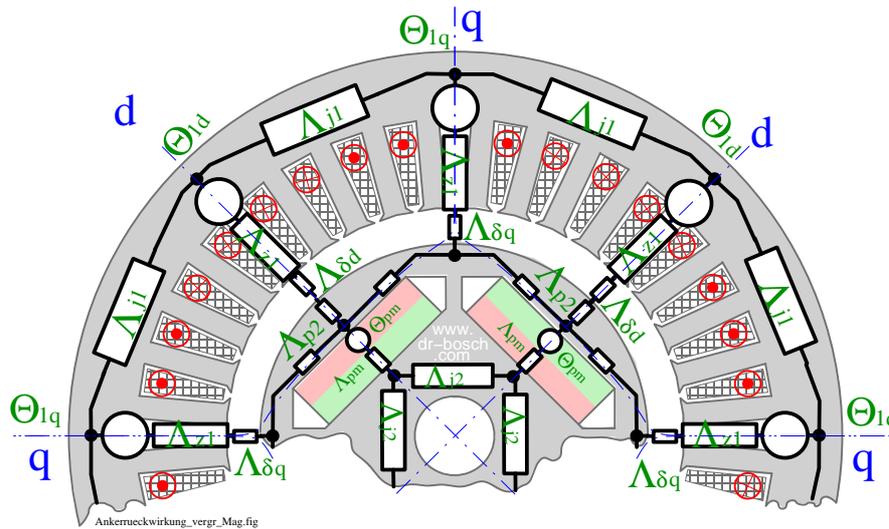


Bild 10: Der magnetische Kreis einer belasteten elektrischen Maschine mit Oberflächenmagneten. Aus Gründen der Darstellung wurden die Polschuhe in drei konzentrierte Elemente Λ_{p2} zerlegt. Diese Elemente sind jedoch nicht unabhängig voneinander, da sie die selbe Permeabilität μ_r aufweisen.

Da die Polschuhe in der q-Achse meist aus konstruktiven Gründen eine geringere Querschnittsfläche aufweisen als in der d-Achse, können diese durch das Ankerquerfeld, bzw. durch die Ankerdurchflutung in der Querachse gesättigt werden. Diese Sättigung beeinflusst dann auch das Erregerfeld, bzw. sorgt sie für einen erhöhten magnetischen Spannungsabfall in der d-Achse, so dass weniger Durchflutung für die Magnetisierung des Luftspalts zur Verfügung steht. Darüber hinaus kann eine Entsättigung der Streustege zwischen Polschuh und Rotorjoch erfolgen, welche zu einer verzerrten räumlichen Verteilung der Erregerdurchflutung im Luftspalt führen kann. Können diese Effekte bei der Berechnung des magnetischen Kreises nicht mehr vernachlässigt werden, steigt der Aufwand der analytischen Rechnung erheblich.

4 Grenzen der analytischen Magnetkreisberechnung

Die analytische Berechnung eines magnetischen Kreises ermöglicht es, den mittleren Durchflutungsbedarf der einzelnen Abschnitte des magnetischen Kreises einer elektrischen Maschine, wie Zähne und Joche schnell und vergleichsweise einfach zu ermitteln. Eine lokale Sättigung, beispielsweise in den Zahnköpfen, kann jedoch auf diesem Wege nicht direkt erkannt werden.

Die analytische Berechnung erfolgt in der Regel nur in einer Dimension. Es wird lediglich eine einzige Masche des magnetischen Kreises betrachtet oder zwei entkoppelte und damit

unabhängige Maschen in d- und q-Achse. So wird der Berechnungsaufwand in einem vertretbaren Rahmen gehalten. Die Betrachtung von Maschen, die über gesättigte Elemente gekoppelt sind, ist bei diesem Vorgehen mit größeren Fehlern behaftet.

Effekte wie das Nutrasten sind grundsätzlich nur sehr schwer zu berechnen, da bereits geringe Änderungen der magnetischen Energie im Luftspalt zu großen Änderungen des Drehmoments führen. Insbesondere haben auch lokale Sättigungseffekte, die hier vernachlässigt wurden, großen Einfluss auf das Rastmoment. Diese können in der analytischen Rechnung nur mit großem Aufwand behandelt werden.

Die Zerlegung der Ankerdurchflutung in unabhängige Durchflutungen längs der d- und q-Achse ist nur dann sinnvoll möglich, wenn die Maschine eine ausreichend hohe Anzahl von Zähnen pro Pol besitzt und die konstruktiven Elemente wie Joche und Polschuhe, welche die beiden Achsen miteinander koppeln, ungesättigt sind. Bei der üblichen Ausführung von Rotoren mit vergrabenen Magneten werden die Polschuhe häufig durch das Ankerquerfeld gesättigt, so dass sich d- und q-Achse gegenseitig beeinflussen.

5 Fazit und Ausblick

Die analytische Berechnung magnetischer Kreise ermöglicht eine schnelle und vergleichsweise einfache Optimierung des magnetischen Kreises einer elektrischen Maschine. Diese Rechnung kann als guter Ausgangswert für die numerische Optimierung oder detaillierte Nachrechnung einer belasteten Maschine verwendet werden.

Auch dreidimensionale Effekte, wie beispielsweise Wickelkopfstreuung, Polverlängerung bzw. -verkürzung im Stirnbereich einer elektrischen Maschine oder Klauenpolgeometrien, können in der analytischen Rechnung vergleichsweise einfach berücksichtigt werden. Bei einer zweidimensionalen numerischen Feldberechnung rufen solche Effekte einen großen zusätzlichen Aufwand hervor oder erzwingen gar eine dreidimensionale Rechnung mit entsprechend hohen Anforderungen an Modellierung und Rechenleistung.

Durch die Kombination von analytischer und numerischer Rechnung kann der Zeitbedarf für die Optimierung einer elektrischen Maschine deutlich reduziert werden. Erfolgt eine erste Optimierung der auszulegenden Maschine bereits auf Basis der analytischen Rechnung, kann die anschließende numerische Rechnung mit höherer Genauigkeit erfolgen. Es sind nur noch vergleichsweise wenige Iterationen erforderlich, da der Startwert der numerischen Rechnung bereits recht nah am Optimum liegt. So sinkt auch die Gefahr, dass die numerische Optimierung in einem lokalen Extremum konvergiert, anstatt das gewünschte globale Optimum zu finden.

Der Einsatz numerischer Methoden kann die Anwendung der analytischen Rechnung vereinfachen und verbessern. So lässt sich beispielsweise die aufwändige Iteration durch eine nichtlineare Nullstellensuche ersetzen. Die Magnetisierungskurven können durch eine

Spline-Interpolation dargestellt werden, so dass keine Sprünge in Funktionswert und Steigung (Permeabilität) entstehen, welche zu Problemen bei der numerischen Nullstellensuche führen können. Permanentmagnet und Luftspalt können in mehrere parallele magnetische Abschnittsleitwerte zerlegt werden, so dass auch die räumliche Verteilung der Flussdichte im Luftspalt ermittelt werden kann. Durch Anwendung numerischer Verfahren, wie Integration und diskrete Fouriertransformation, können anschließend gemittelte Flussdichte und Grundwellenamplitude schnell und präzise ermittelt werden. Die Kopplung von d- und q-Achse über Elemente mit nichtlinearer Magnetisierungskurve kann durch den Übergang auf ein Reluktanznetzwerk berücksichtigt werden.

Auch über hundert Jahre nachdem die Grundlagen der analytischen Berechnung elektrischer Maschinen geschaffen wurden, kann diese auch heute noch sinnvoll und nutzbringend eingesetzt werden. Sie ersetzt die aktuellen Methoden der numerischen Berechnung magnetischer Felder nicht, sondern ergänzt diese um eine schnelle Abschätzung bzw. Vor-Optimierung.

Literatur

- [1] CARTER, F. W.: *Air-Gap Induction*. Electrical World and Engineer, Vol. XXXVIII(No. 22):884–888, 1901.
- [2] VOGT, KARL: *Berechnung elektrischer Maschinen*. Reihe *Elektrische Maschinen*. VCH Verlagsgesellschaft mbH, Weinheim, 1996.
- [3] RICHTER, RUDOLF: *Elektrische Maschinen*, Band I: *Allgemeine Berechnungselemente. Die Gleichstrommaschinen*. Birkhäuser Verlag, Basel (CH), 3. Auflage, 1967.
- [4] NÜRNBERG, WERNER: *Die Asynchronmaschine – ihre Theorie und Berechnung unter besonderer Berücksichtigung der Keilstab- und Doppelkäfigläufer*. Springer-Verlag, Berlin, 1952.
- [5] SCHUISKY, W.: *Berechnung elektrischer Maschinen*. Springer-Verlag, Wien (A), 1960.
- [6] KLAMT, JOHANNES: *Berechnung und Bemessung elektrischer Maschinen – Asynchronmotor, Synchronmaschine, Gleichstrommaschine, elektrische Schlupfkupplung*. Springer-Verlag, Berlin, 1962.
- [7] BINDER, ANDREAS: *Elektrische Maschinen und Antriebe – Grundlagen, Betriebsverhalten*. Springer-Verlag, Berlin, 2012.
- [8] RICHTER, RUDOLF: *Elektrische Maschinen*, Band II: *Synchronmaschinen und Einankerumformer*. Birkhäuser Verlag, Basel (CH), 2. Auflage, 1953.
- [9] ENGELN-MÜLLGES, GISELA, KLAUS NIEDERDRENK und REINHARD WODICKA: *Numerik-Algorithmen*. Springer-Verlag, Berlin, 9. Auflage, 2005.

- [10] *FFTW Home Page*. <http://www.fftw.org/>. Zuletzt besucht am 14.02.2017.
- [11] RICHTER, RUDOLF: *Elektrische Maschinen*, Band IV: *Die Induktionsmaschinen*. Birkhäuser Verlag, Basel (CH), 2. Auflage, 1954.
- [12] REUTLINGER, KURT: *Mechatroniksystem für Einzelspindelantriebe in Textilmaschinen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1997. Shaker Verlag, Aachen.